

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
Серия «История науки и техники»

Г. Е. ГОРЁЛИК

**ПОЧЕМУ
ПРОСТРАНСТВО
ТРЕХМЕРНО?**



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

Москва 1982

Г—68 Горелик Г. Е. Почему пространство трехмерно? М.: Наука, 1982, 168 с.

Что означает утверждение о трехмерности пространства? Как возникли современные представления о размерности пространства в физике и математике? Какую роль играет трехмерность пространства в фундаментальных законах физики? Этим вопросам посвящена книга. Рассматривается роль понятия размерности в физике микро- и мегамира, соотношение различных подходов к понятию размерности, взаимосвязь физики и геометрии. Вместе с историей создания современных представлений о размерности пространства рассказывается о творчестве замечательных ученых — физиков и математиков: А. Эйнштейна, П. Эренфеста, А. Пуанкаре, П. С. Урысона и других.

Для широкого круга читателей, интересующихся эволюцией фундаментальных понятий физики.

Ответственный редактор

Г. М. ИДЛИС

ПРЕДИСЛОВИЕ

Почему пространство имеет три измерения? Какую роль играет трехмерность пространства в фундаментальных законах физики? Что в точности означает утверждение о трехмерности пространства? Какие существуют возможности для описания понятия размерности пространства в математике? Как возникли современные представления о размерности пространства в физике и математике? Можно ли допустить, что размерность — это не просто какое-то вполне определенное число, а физическая величина, значение которой в экстремальных условиях может отличаться от трех?

Всем этим вопросам посвящена данная книга. Первые два из перечисленных вопроса послужили названиями замечательных работ А. Пуанкаре [1] и П. Эренфеста [2], с которых начинается современный этап развития представлений о размерности пространства.

Чтобы точнее и глубже понять современное состояние проблемы размерности, лучше всего рассмотреть эту проблему в ее историческом развитии. Размерность — только одно из наиболее общих свойств пространства-времени, а эволюция представлений о пространстве и времени имеет многовековую историю. Однако есть основания период с начала XX в. назвать историей современных представлений о размерности пространства, а весь предшествующий период — предысторией. Такое разделение в некоторой степени условно, но все же именно в XX в. сформировались наиболее существенные элементы современных представлений о размерности.

В физике эти представления прошли путь от априорного числа, характеризующего абсолютным образом весь материальный мир, до физического понятия, связанного со свойствами физических явлений и допускающего экспериментальное, эмпирическое обоснование. В математике был пройден путь от свойства пространства, имеющего довольно неопределенное выражение, до математических

понятий, весьма общим (хотя и не единственным) образом уточняющих (или, как говорят математики, формализующих) представление о размерности пространства.

Изложение в книге ведется с учетом современного состояния проблемы размерности и возможного значения этой проблемы для будущего развития физики. Дело в том, что состояние физики в настоящее время характеризуется не только весьма активным использованием понятия размерности, но и надеждами на ту важную роль, которую может сыграть размерность при построении единой теории фундаментальных взаимодействий. История же всегда дает возможность глубже и точнее понять современность.

В современной науке понятие размерности пространства имеет важное значение в двух существенно различных смыслах.

Во-первых, в физике трехмерность пространства, или (с учетом теории относительности) $3+1$ -мерность пространства-времени, как фундаментальное свойство материального мира определяет наиболее общие физические законы.

Во-вторых, размерность пространства — центральное понятие топологической теории размерности, являющейся одной из важнейших областей топологии и строящейся для произвольных значений размерности.

Целесообразность рассматривать совместно формирование представлений о размерности пространства в физике и топологии определяется следующими обстоятельствами.

Современные представления о размерности физического пространства и топологическое понятие размерности возникли примерно в одно и то же время (начало XX в.), и, что более важно, топологическое понятие размерности имело у А. Пуанкаре отчетливое физическое происхождение (гл. 1). Есть также основание считать, что первый, подлинно физический анализ факта трехмерности пространства, проведенный П. Эренфестом, был стимулирован развитием математики (гл. 3). Формирование современных представлений о размерности пространства — интереснейший пример взаимодействия физики и математики (гл. 1, 4).

Понятие размерности пространства в математических моделях пространства, используемых физикой, получило наибольшее обобщение в рамках топологии (хотя математике известны и такие геометрические модели,

в которых определение размерности может быть не эквивалентно топологическому, например так называемые конечные геометрии). Анализ физических представлений о размерности пространства должен, разумеется, учитывать имеющиеся возможности математического описания размерности пространства.

Нуждается в анализе тот факт, что топологическая теория размерности не способствовала более глубокому пониманию физической проблемы размерности пространства. С точки зрения наиболее глубокой на сегодняшний день физической теории пространства-времени — общей теории относительности — физическое пространство имеет структуру так называемого четырехмерного псевдориманова многообразия, структура которого локально, т. е. в малой окрестности каждой точки, совпадает со структурой обычного евклидова пространства. Поэтому для топологической теории размерности многообразие — довольно тривиальный объект. Более того, даже точное математическое представление о многообразии было не таким уж необходимым для физики (гл. 2). Обычно оказывается вполне достаточным представление о пространстве как о множестве, каждый элемент которого — совокупность чисел (координат), а о размерности — как о минимальном числе параметров, необходимом для «нумерации» точек пространства. Такие представления соответствуют математическому уровню прошлого века.

Кроме того, топологический подход к размерности физического пространства-времени несовместим с имеющими интересную историю гипотезами дискретного пространства и фундаментальной длины, характеризующей предел применимости обычных представлений о непрерывном пространстве-времени. С этими идеями, как известно, связывались большие надежды на решение фундаментальных проблем физики элементарных частиц. Однако в рамках топологической модели физического пространства невозможно совместить дискретную (в микромасштабах) и непрерывную трехмерную (в макромасштабах) структуры физического пространства. Анализ представлений о размерности физического пространства интересен также потому, что в настоящее время в работах, относящихся к физике элементарных частиц, появляются многочисленные конструкции, чуждые обычной модели физического пространства. Одномерные струны и двумерные мешки в теории сильных взаимодействий, квантовая тео-

рия поля в пространстве размерностью, не равной трем (рассматриваются даже нецелые значения размерности), космология ранней Вселенной — весьма различные соображения приводят к рассмотрению пространств с размерностью, отличной от трех (гл. 5).

Все эти обстоятельства делают естественным интерес к фундаментальному понятию размерности пространства в современной физике.

Автор глубоко благодарен Б. Г. Кузнецову и У. И. Франкфурту за помощь при работе над этой книгой.

ВВОДНАЯ ГЛАВА

Кратко о предыстории

То свойство материального мира, которое на современном языке называется размерностью, или числом измерений, пространства, было открыто (наверное, правильнее сказать, увидено) в глубокой древности. Понятие геометрического пространства начало формироваться еще у Платона в 4 в. до н. э. [3]. К Платону и пифагорейцам восходит установление геометрических объектов разных размерностей (точка, линия, поверхность, тело) и связей между такими объектами: линия — след движущейся точки, поверхность — след движущейся линии, концы линии — это точки и т. д.

Такие взаимоотношения геометрических объектов разных размерностей стали основой одной из первых попыток *доказать* трехмерность пространства. Действительно, движение точки образует линию (т. е. одномерную фигуру), движение линии образует поверхность — совокупность «следов» всех точек движущейся линии (т. е. двумерную фигуру), движение поверхности в том же смысле образует тело (т. е. трехмерную фигуру), но движение тела может привести только к образованию другого тела. Тем самым, казалось бы, трехмерность оказывается выделенной уже по чисто математическим причинам.

Однако может ли это наблюдение математического характера быть *обоснованием* трехмерности пространства или быть ответом на вопрос: «Почему пространство трехмерно?» Конечно, нет. Прежде всего легко заметить неточность приведенного рассуждения. Не всякое движение линии образует поверхность, движение линии вдоль самой себя дает ту же самую линию.

Если мы, например, заранее ограничимся только движениями в некоторой плоскости, то увидим, что всякое движение точки по-прежнему образует линию, движение линии может образовать плоскую (двумерную) фигуру, но движение плоской фигуры не может уже образовать ничего отличного от плоской фигуры (напомним, что рас-

считаются только движения в фиксированной плоскости). Таким образом могли бы «доказать» двумерность своего мира некие двумерные существа, обитающие на некоторой плоскости и неспособные представить себе, что могут означать такие фразы, как, например, перпендикуляр к данной плоскости, пересечение двух плоскостей и т. д.

Мы видим, что «доказательство» такого рода всего лишь указывает на свойство трехмерности, выделяет его из множества других свойств материального мира. Стоит, впрочем, отметить, что делается это плодотворным образом, не просто указывая пальцем на данное свойство, а устанавливая его связь с другими понятиями: линией, поверхностью (т. е. одномерностью, двумерностью), а также с важнейшим понятием движения.

Человеку XX в., который со многими абстрактными понятиями знакомится еще в детстве, требуются большие усилия, чтобы в должной мере оценить выдающиеся достижения мыслителей Древней Греции, и в частности Платона, впервые явно осознавшего мощь теоретического мышления и особенности таких странных «объектов», как «понятия», «идеи». Только воссоздав для себя ощущение того уровня культуры, который был отпавшим для Платона и его коллег, можно в какой-то мере представить скачок в развитии цивилизации, происшедший в Древней Греции. Результатами той эпохи стали и понятия точки, линии, поверхности, которые в наши дни кажутся тривиальными даже школьнику (впрочем, только кажутся).

Наиболее выдающимся учеником Платона был Аристотель, который (как и полагается выдающимся ученикам) совершенно иначе отнесся к факту трехмерности. Справедливо критикуя уверенность Платона в полной независимости, «занебесности», вечности существования идей (в частности, и геометрических идей) и подчеркивая вторичность идей по отношению к чувственно воспринимаемым объектам, Аристотель, как это нередко бывало в истории развивающегося знания, ушел в другую крайность, отобрав самостоятельность у идей почти полностью.

Что касается трехмерности, то Аристотель считал, что число 3 мы берем из природы как один из ее законов, а «принимая саму природу в качестве нашего руководителя», нет никакого смысла задумываться, почему мате-

риальный мир имеет именно три измерения. Но вклад Аристотеля в историю понятия размерности не сводился лишь к такой, в некотором смысле бескрылой позиции.

Во-первых, он явным образом связал размерность с непрерывностью, понимая непрерывность как бесконечную делимость: «Величина, делимая одним способом, — это линия, делимая двояко — поверхность, трояко — тело. Других никаких величин нет, потому что три — это все, и «тремя способами» — то же самое, что «всеми способами»» [4]. Упомянув, что уже пифагорейцы придавали особое значение числу 3, Аристотель приводит даже некое филологическое доказательство этого утверждения: «...о двух вещах или людях мы говорим «оба», а не «все». Последний термин мы впервые используем, когда речь идет о трех...».

Кроме того, именно Аристотель первым сопоставил линии, поверхности и телу числа 1, 2 и 3 вопреки пифагорейцам, которые точке (простейшему, с их точки зрения, геометрическому объекту) приписывали число 1, линии — 2 и т. д. Очень упрощая ситуацию, можно сказать, что пифагорейцы просто составили «опись» качественно различных геометрических объектов и перенумеровали их (хотя и в правильном порядке). Аристотель же выдвинул вполне конструктивное определение: «...тело... определяется протяженностью в трех направлениях. Другие величины делимы в одном или двух направлениях в соответствии с числами, которые сопоставляются различным величинам по количеству направлений, которыми характеризуется их делимость и непрерывность. Одна непрерывна в одном направлении, другая — в двух и третья — во всех». Так что современная математика следует Аристотелю, когда называет линию одномерной, плоскость — двумерной, а точку — нульмерной. Впрочем о точке Аристотель не говорил. Он, вообще излишне «приземляя» понятия, действительно «полноценной», полной считал только трехмерную величину, в то время как для математики все величины одинаково полноценны.

Здесь необходимо подчеркнуть, что говорить об идеях Пифагора, Платона, Аристотеля и даже Евклида, употребляя слова «число измерений» и «размерность», не совсем правильно. Геометрическая идея измерения длины, метрическая точка зрения гораздо более позднего происхождения. Аристотель говорит о величинах, о протяженностях, о направлении, о непрерывности и делимости, но не об

измерении. Поскольку областью математики, посвященной изучению с разных сторон понятия непрерывности, является топология (подробнее о ней см. ниже), можно сказать, что аристотелевское определение, основанное на понятии непрерывности, по существу имеет топологический характер. Однако история науки предпочла не воспользоваться этим, а дала возможность возникнуть и победить метрическим представлениям, прежде чем в XVIII в. появились первые ростки топологии и только в начале XX в. появилось настоящее топологическое определение размерности. Именно в топологии связь понятий размерности и непрерывности получила наиболее общее выражение.

Перенесемся теперь от Аристотеля на две тысячи лет вперед, в середину XVIII в., к одному из величайших немецких философов — Иммануилу Канту. Это вовсе не означает, что между ними не было никого, чье имя стоило бы упомянуть в связи с историей представлений о размерности пространства. Был Евклид, подытоживший геометрические достижения древности и рамками евклидовой геометрии ограничивший (не по своей воле) достижения будущих двадцати веков, вплоть до XIX в. Были Галилей, Ньютон, Лейбниц, труды которых положили начало физике нового времени. Были и другие замечательные физики, математики, философы.

Но все же именно Канту принадлежит подлинно новая идея. В работе Канта понятие размерности впервые было связано с конкретным физическим законом и оказалось причастным к одному из величайших идейных противоборств в истории физики — соперничеству концепций абсолютности и относительности пространства.

Кратко говоря, первая из них предполагает, что пространство есть нечто абсолютное, заданное, нечто, подобное готовой сцене, на которой разыгрываются физические явления, но которая не зависит от самих этих явлений. Идея относительности пространства означает, что пространственные отношения — это лишь некоторые отношения физических тел между собой; что если пространство и можно уподобить сцене, то эта сцена создается в ходе самого спектакля, создается физическими явлениями, взаимодействиями между телами. И существующей независимо от взаимодействий эту сцену нельзя даже помыслить. Концепция абсолютного пространства победила (хотя и не полностью) в механике Ньютона и царствовала в физике вплоть до начала XX в., когда в общей теории относитель-

тельности Эйнштейна победила (хотя опять-таки не полностью) идея относительности пространства, первым убежденным сторонником которой был Лейбниц.

Под влиянием взглядов Лейбница и находился Кант, когда он обратился к проблеме размерности пространства. Точности ради следует сказать, что Кант был тогда еще не великим немецким философом, а всего лишь студентом университета в Кёнигсберге. Первая его опубликованная работа называлась «Мысли об истинной оценке живых сил и разбор доказательств, которыми пользовались г-н Лейбниц и другие знатоки механики в этом спорном вопросе, а также некоторые предварительные соображения, касающиеся силы тел вообще». Она была посвящена в основном вопросу, какая величина является истинной мерой движения: mv или $mv^2/2$ (т. е. импульс или кинетическая энергия), и устарела уже к моменту своего выхода, поскольку вопрос, вызывавший жаркие споры, был разрешен несколькими годами раньше. Эта книга, написанная ясным и энергичным языком, сохранила бы значение лишь интересного биографического документа, ярко демонстрирующего молодой задор и смелость духа 23-летнего Канта, если бы 3 из ее 180 страниц не были посвящены факту трехмерности пространства. Эти три страницы относятся к «предварительным соображениям, касающимся силы тел вообще», о которых объявлено в названии книги, и главными на этих страницах являются слова: «Трехмерность происходит, по-видимому, оттого, что субстанции в существующем мире действуют друг на друга таким образом, что сила действия обратно пропорциональна квадрату расстояния» [5].

А привели Канта к этому предположению следующие рассуждения.

Начинает он с восходящего к Лейбницу представления об относительной природе пространства.

«Легко доказать, что не было бы никакого пространства и никакого протяжения, если бы субстанции не обладали никакой силой действовать вовне. Ибо без этой силы нет никакой связи, без связи — никакого порядка и, наконец, без порядка нет никакого пространства... Однако несколько труднее понять, каким образом из закона, по которому эта сила субстанций действует вовне, вытекает множественность измерений пространства». Затем под заголовком «Основание трехмерности пространства еще не

известно» Кант рассказывает об одной своей неудачной попытке найти такое основание.

«Так как в доказательстве, основанном у г-на фон Лейбница в одном месте его «Теодицеи» на количестве линий, которые могут быть проведены из одной точки перпендикулярно друг другу, я усматриваю порочный круг¹, то я решил вывести трехмерность протяжения из того, что мы наблюдаем над степенями чисел. Первые три степени чисел совершенно просты и не могут быть сведены ни к какому другим, четвертая же, будучи квадратом квадрата, есть не что иное, как повторение второй степени». Затем Кант признается, что, «каким бы полезным ни казалось» это свойство, ему так и не удалось с его помощью объяснить трехмерность пространства. И лишь затем следуют рассуждения, приводящие к предположению о связи трехмерности пространства и того факта, что «субстанции в существующем мире действуют друг на друга» с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния.

Обосновывают связь размерности пространства с законом силы следующие рассуждения: пространство есть упорядоченность, порядок в совокупности тел, пространство — отношение тел. Однако сами эти отношения проявляются в силах, действующих между телами. А силы (гравитационные — единственно фундаментальные силы, известные в то время) изменяются обратно пропорционально квадрату расстояния между телами. Поэтому «2» в законе силы и «3» — размерность пространства — должны быть связаны (хотя Кант и не говорит о конкретной форме такой связи).

В этом рассуждении Канта плодотворным оказалось восходящее к Лейбницу представление об относительной природе пространства (пространство — отношение тел). Подобное рассуждение было невозможным для «жесткого» сторонника ньютоновского абсолютного (не зависящего от взаимодействия тел) пространства.

В заключение Кант говорит: «Эти мысли могут послужить наброском для некоего исследования, которым я намереваюсь заняться. Не могу, однако, отрицать, что сооб-

¹ Вполне понятно, что равенство размерности максимальному числу взаимно перпендикулярных линий, проведенных из одной точки, не в большей степени может обосновать трехмерность, чем приведенное ранее «доказательство», основанное на взаимоотношении геометрических фигур разной размерности. Это просто еще одна форма констатации факта трехмерности.

щаю их в том виде, в каком они мне пришли в голову, не придав им требуемой достоверности с помощью более подробного изучения. Я готов поэтому снова отказаться от них, как только более зрелое суждение раскроет мне их слабость».

Так и произошло. В более поздний, так называемый критический, период, к которому относятся основные философские сочинения Канта, он пришел к представлению о том, что пространство априорно, т. е. не зависит от опыта, предшествует всякому опыту и, разумеется, не может зависеть от конкретного закона сил. А все свои ранние работы он объявил результатом «догматического сна». Рассмотрение обоснованности и необоснованности такой идейной эволюции Канта потребовало бы слишком много места и увело бы далеко от темы этой книги. Поэтому здесь придется ограничиться замечанием, что гениальная мысль не становится менее гениальной, если тот, кому она «пришла в голову», эту мысль впоследствии отвергнет.

Вернемся теперь к самой гипотезе Канта, которая по существу ставила задачу объяснения трехмерности пространства исходя из конкретного закона силы². Допустим, что эта задача была бы решена. Можно ли было бы тогда решение этой задачи признать удовлетворительным ответом на вопрос: «Почему пространство трехмерно?» Вряд ли с этим согласились бы многие, ведь сразу же возникает новый вопрос: «А почему силы изменяются обратно пропорционально квадрату расстояния?»

Поэтому попробуем вообще разобраться в том, как наука отвечает на вопросы «почему».

² Живущим в последней четверти XX в. и знающим, что среди фундаментальных взаимодействий есть и такие, которые не подчиняются простому закону $F \sim r^{-2}$ (сильные и слабые взаимодействия), легко усомниться в том, что такая задача имеет решение. В 1747 г., которым помечена книга Канта, был известен закон только для одного взаимодействия — гравитационного, и оснований для таких сомнений не было. Для гипотезы Канта, впрочем, можно было найти еще более удачное время — с 1785 г., когда Кулон установил, что электрические заряды взаимодействуют по такому же закону $F \sim r^{-2}$, и вплоть до 30-х годов нашего века, когда обнаружились короткодействующие фундаментальные силы. Следует, однако, подчеркнуть, что если происходящее сейчас построение единой теории всех фундаментальных взаимодействий будет успешно завершено, то не исключено, что в XXI в. поставленная Кантом задача будет восприниматься как правильно сформулированная проблема.

Вопросы «почему» в науке

Чтобы фундаментальность и необычность главного для нашей книги вопроса «почему» не заслоняла реальную жизнь науки, рассмотрим какой-нибудь совсем простой вопрос, например: «Почему бывает зима и лето?»

На этот вопрос современная наука отвечает примерно так. Земля имеет шарообразную форму, вращается вокруг своей оси, наклоненной к плоскости движения Земли вокруг Солнца. В разных точках орбиты солнечные лучи падают на данное место земной поверхности под разными углами, а тепловое воздействие света тем больше, чем меньше угол, т. е. чем ближе направление луча к перпендикуляру. Поэтому холоднее всего (зима) на том участке орбиты, где солнечные лучи падают на данное место земной поверхности под наибольшим углом, а теплее всего (лето) на том участке орбиты, где угол падения наименьший.

Чтобы этот ответ был действительно основательным, необходимо в него включить: законы механики и закон всемирного тяготения, управляющие движением Земли вокруг Солнца и движением оси собственного вращения Земли; законы электромагнитного поля, управляющие распространением света и его взаимодействием с веществом. Для изложения этих законов понадобилось бы ввести многие понятия механики, теории гравитации и электромагнетизма, включая и весьма обширный математический аппарат (производные, интегралы, векторный анализ и т. д., и т. д.).

Часть сведений, необходимых для ответа, пришлось бы отнести к так называемым начальным условиям (угол наклона оси к плоскости движения, светимость Солнца). Причем некоторые из этих начальных условий могут со временем переходить в раздел «Фундаментальные законы» и заменяться более общими, более удаленными от нас условиями. Например, теории эволюции звезд могла бы объяснить сегодняшнюю светимость Солнца, космогония — угол наклона оси и т. д.

Итак, для ответа на вопрос: «почему бывает зима и лето?» — нам по существу понадобилась вся современная физическая наука и даже кое-что из будущей. Но зато мы получили ответ не только на исходный вопрос, но заодно и на многие другие; и не только «почему от зимы до зимы всегда проходит примерно одинаковое время», «почему на

некоторых планетах может не быть смены зимы и лета», но и на такие вопросы: «как запускать искусственные спутники и делать ЭВМ» и т. д. А если мы захотели бы разобраться, как происходит смена времен года на планете, вращающейся вокруг нейтронной звезды на небольшом расстоянии, нам пришлось бы уточнять многие из уже использованных понятий: масса планеты оказалась бы зависящей от скорости, ее орбита оказалась бы не эллипсом, пространство — искривленным и даже период времени от зимы до зимы оказался бы уменьшающимся со временем.

Так что наиболее полный ответ, который может дать наука на вопрос о каком-то физическом явлении, состоит во включении этого явления в физическую картину мира, описывающую изучаемое свойство, явление (вместе со множеством других явлений) исходя из немногих наиболее фундаментальных элементов физической картины мира.

Примерно так же обстояли бы дела с любым другим вопросом «почему?».

Заметим теперь, что на всем протяжении уточняющегося ответа на вопрос: «Почему бывает зима и лето?» — подразумевалось (молчаливо), что размерность пространства равна трем даже тогда, когда дрогнули ньютоновские представления о пространстве и их пришлось заменить эйнштейновскими. Впрочем, при этой замене несколько изменилось понятие размерности, т. е. изменилось то, что по-прежнему равнялось трем.

Но это лишь означает особую фундаментальность понятия размерности и факта трехмерности, т. е. буквально то, что размерность пространства находится в фундаменте здания физической науки. Это здание, как известно, постоянно подвергается изменениям: происходят «достройки», «ремонт», «перепланировки» и даже радикальные «перестройки». Фундамент, конечно, редко затрагивается при перестройке здания. Но зато те случаи, когда изменения в фундаменте оказываются необходимыми, производят особенно большое воздействие и на саму науку и на человечество в целом.

И, разумеется, нет оснований понятие размерности реального физического пространства не считать физическим понятием, а факт трехмерности пространства — физическим фактом.

В связи со всем этим вопрос: «Почему пространство трехмерно?» — по существу ставит перед наукой следующие задачи.

1. Надо построить математическое понятие размерности, пригодное для использования в достаточно общей физической теории. Эта задача хотя и неоднозначна, но совершенно необходима, потому что только с помощью математического языка физика может строить свои теории и описывать природу достаточно определенным образом.

2. Для того чтобы факт трехмерности пространства мог считаться действительно физическим, необходимо разработать способы его проверки и способы «измерения» размерности. То, что речь идет не о простой задаче, ясно видно из неопределенности совершенно обычного и понятного в других случаях вопроса: «С какой точностью размерность пространства равна трем?». Подобный вопрос имеет вполне определенный смысл, например, по отношению к такому фундаментальному факту, как равенство гравитационной и инертной масс. Этот факт, лежащий в основе общей теории относительности (в виде принципа эквивалентности), проверен в настоящее время с точностью до 10^{-12} , т. е. было измерено, что $|m_n/m_T - 1| < 10^{-12}$. Поскольку размерность d — целочисленный параметр (по крайней мере если исходить из обычных представлений о размерности), то неравенство типа $|d-3| < \varepsilon$, где ε — некое малое число, кажется совершенно бессмысленным³. И тем не менее проблема эмпирической обоснованности утверждения о трехмерности пространств, несмотря на свою необычность, является вполне определенной.

3. И, наконец, полный ответ на вопрос: «почему пространство трехмерно» — предполагает одно из двух. Либо понятие размерности должно быть включено в такую физическую теорию, в которой факт трехмерности (по крайней мере по отношению к известным явлениям, уже полностью изученным физикой) наряду с другими фундаментальными физическими фактами окажется следствием еще более общих положений. Либо должно быть доказано, что трехмерность пространства входит в некие начальные условия и не может быть сведена ни к каким более глубоким положениям; при этом должна быть выяснена природа этих начальных условий.

По первым двум направлениям наука продвинулась довольно далеко, а что касается третьего направления (которое, естественно, должно опираться на результаты

³ Впрочем, в современной физике, как будет рассказано в гл. 5, выражение вида $d=3+\varepsilon$ встречается и даже активно используется, хотя и в весьма специфическом смысле.

первых двух), то здесь имеются только отдельные попытки, предположения и предварительные гипотезы. Об этих трех направлениях исследования и будет идти речь в дальнейшем. Однако прежде чем рассматривать формирование современных представлений о размерности, следует еще пояснить два выражения, которые будут часто использоваться. Надо, во-первых, уточнить, как понимаются слова «обычная» или «классическая» модель пространства, и, во-вторых, дать некоторое представление о том, что такое топология.

Классическая модель пространства

Это наиболее известная физическая модель пространства, именно ее изучают в средней школе, и эта модель истощает практически все потребности макроскопической физики. Макроскопическими называют физические явления «человеческих» масштабов (по размерам, энергии, температуре и значениям других характерных параметров). Однако в действительности классическая модель пространства достаточна для описания гораздо большего диапазона явлений, включающего и атомные спектры, и движение планет. И это, пожалуй, один из самых удивительных фактов в истории науки.

Действительно, ведь геометрическое описание этой модели пространства содержалось уже в «Началах» Евклида, появившихся в III в. до н. э. За двадцать три столетия, прошедших до начала XX в., произошли грандиозные изменения в физических представлениях, в самом характере физики как науки. Представления аристотелевской физики о движении, разделявшие пропастью небесную механику и земную, заменились ньютоновскими законами, единым образом управляющими движениями небесных и земных тел. Представления, согласно которым движение тела прекращается, когда на него перестают действовать силы, были заменены законом инерции: тело, на которое не действуют силы, сохраняет состояние равномерного и прямолинейного движения. Представление о зрительных лучах, исходящих из глаза и «ощупывающих» предметы, заменилось корпускулярной, а затем волновой оптикой. Взаимодействие натертых кусочков янтаря и магнитных тел, объяснявшееся действиями соответствующей души, стало пониматься как проявление законов Максвелла.

И несмотря на все это, геометрическая модель физического пространства осталась по существу неизменной.

Очень важным событием (особенно для возможностей будущего развития) было создание в XVII в. аналитической геометрии, появление координатного пространства, но по существу это было лишь новой формой представления все той же евклидовой модели пространства.

Здесь стоит подчеркнуть, что само словосочетание «модель пространства», которое уже не раз встречалось, показалось бы, пожалуй, нелепым для математиков вплоть до середины XIX в. (когда было понято значение неевклидовых геометрий, открытых Лобачевским, Бояи и Риманом), а для физиков вплоть до начала XX в., когда сначала в специальной теории относительности евклидову геометрию пространства заменила геометрия пространства-времени Минковского и затем в общей теории относительности — общая риманова геометрия пространства-времени. И это не удивительно. Ведь рассматривать некоторое описание как модель можно только тогда, когда становится ясной неоднозначность такого описания. До этого момента ученые могли считать (и считали), что евклидова геометрия тождественна самому физическому пространству.

Физическая модель пространства не сводится к одной геометрии. Ведь в геометрии ничего не говорится, *как* проводить прямые линии, *из чего* и *как* нужно делать линейку и т. д. Поэтому в физическую модель пространства кроме геометрии должны включаться физические интерпретации геометрических понятий. Например, прямая линия сопоставляется туго натянутой веревке или лучу света; точка — предмету, размерами которого можно пренебречь по сравнению с другими характерными размерами, и т. д. Только после этого можно говорить, соответствует ли теоретическое описание реальности.

Что же такое классическая модель пространства? Проведем в пространстве так называемые оси прямоугольных координат, т. е. три взаимно перпендикулярные линии, проходящие через одну точку, называемую началом координат. Установим определенную единицу длины и отложим на осях числа, равные расстояниям до начала координат, причем в одну сторону от начала координат со знаком плюс, а в другую — со знаком минус. После этого каждой точке пространства можно поставить в соответствие три числа; для этого из данной точки пространства

опустим перпендикуляры на оси координат, каждый из перпендикуляров отметит точку на оси координат, т. е. некоторое число — положительное или отрицательное. В результате каждой точке пространства ставится в соответствие три числа (x_1, x_2, x_3) , которые называются координатами этой точки. И наоборот, любой тройке чисел соответствует одна и только одна точка пространства, координатами которой являются эти три числа. Возможность всех приведенных построений может быть экспериментально проверена. (Такая проверка для областей пространства порядка 1 м с точностью до 1% (т. е. до 1 см) вполне осуществима обычными домашними физическими приборами. Но вопрос проверки в случаях, скажем, атомных или астрономических явлений не так прост.)

Итак, введение системы координат превращает пространство в совокупность всевозможных троек чисел (x_1, x_2, x_3) . При этом евклидов характер геометрии, как оказывается, полностью определяется тем, что квадрат расстояния между точкой p с координатами (x_1, x_2, x_3) и точкой p' с координатами (x_1', x_2', x_3') равен

$$r^2 = (x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2. \quad (1)$$

Это равенство следует из теоремы Пифагора, и, в свою очередь, следствием этого равенства оказывается вся евклидова геометрия, каждое утверждение которой можно переформулировать, используя только понятие расстояния между двумя точками. Формула (1), как говорят, задает *метрическую* (в данном случае евклидову) структуру пространства.

В математике евклидовым n -мерным пространством E^n называется совокупность всевозможных наборов из n чисел (x_1, \dots, x_n) . Каждый такой набор называется точкой пространства, и расстояние между двумя точками (x_1, \dots, x_n) и (x_1', \dots, x_n') определяется равенством

$$r^2 = (x_1 - x_1')^2 + \dots + (x_n - x_n')^2. \quad (2)$$

Таким образом, с математической точки зрения классической моделью пространства оказывается трехмерное евклидово пространство E^3 . Ясно, что координаты, приписываемые некоторой точке пространства, не имеют абсолютного смысла, а зависят от того, как выбраны начало координат и направление координатных осей. Не обязательно также использовать именно прямоугольную систему координат; для других систем координат равенство (1),

выражающее величину расстояния между двумя точками через их координаты, изменит свой вид, но при этом, конечно, теорема Пифагора, по-прежнему, будет выполняться⁴. Однако в любом случае нужно именно три координаты, чтобы задать положение точки в пространстве полностью. Это обстоятельство обычно и воспринимается как проявление факта трехмерности. О недостаточности такого понимания размерности речь пойдет дальше, а пока напомним, что математическая модель пространства E^3 оказалась вполне достаточной для огромной области физических явлений и значение этой довольно простой модели не может уменьшиться, как бы ни развивалась физика и как бы ни изменялись представления о пространстве.

Что такое топология?

Несколькими страницами раньше говорилось, что топология — это область математики, изучающая с разных сторон понятие непрерывности. Однако это слишком неопределенное представление. Остается неясным, как математика понимает, моделирует очень общее свойство непрерывности, интуитивно довольно ясное, но имеющее существенный психологический компонент.

Эпитет «топологический» применим к таким математическим фактам, к таким свойствам математических объектов, которые для своего выражения требуют понятий, основанных только на отношении примыкания точек данного объекта к любым его частям. Таким образом, чтобы говорить о топологических свойствах некоторого множества точек, необходимо для каждой точки этого множества и каждой части этого множества знать, примыкает ли данная точка к данной части множества или нет⁵.

Тогда говорят, что задана топологическая структура данного множества, или, проще, задана топология данного множества. Всякое множество с заданной топологической структурой называется топологическим пространством.

Рассмотрим, например, числовую ось и некоторое множество точек на ней. Примером топологического свойства

⁴ Если же равенство (1) изменит свой вид так, что теорема Пифагора не будет выполняться, то мы получим одну из неевклидовых геометрий.

⁵ Отношение примыкания подчиняется некоторым естественным условиям; в частности, считается, что всякая точка примыкает сама к себе.

является связность. Множество называется связным, если его нельзя разбить на две части так, чтобы любая точка каждой из частей не примыкала к другой части. Примером топологического понятия является граница данного множества, которой называется совокупность всех точек, примыкающих одновременно и к данному множеству и к его дополнению, т. е. к остальной части топологического пространства. На числовой оси каждое из множеств $[0, 1]$, $(0, 1]$, $[0, 1)$, $(0, 1)$ имеет границу, состоящую из двух точек: 0 и 1. Легко видеть, что множество связно, если его нельзя разбить на две части, границы которых не имеют общих точек. Другие топологические понятия — замкнутость и открытость. Множество называется замкнутым, если оно содержит все точки своей границы, а открытым — если не содержит ни одной точки своей границы. Из указанных четырех множеств на числовой оси замкнуто только $[0, 1]$, открыто только $(0, 1)$, а остальные два и не открыты и не замкнуты.

В предыдущем абзаце предполагалось интуитивно ясным то отношение примыкания, которое вводится на числовой оси⁶. Но в общем случае возникает вопрос: как может вводиться топологическая структура? Саму топологию этот вопрос интересует не больше, чем метрическую геометрию интересует вопрос, каким образом можно задать расстояния для каждой двух точек. Метрическая геометрия, чтобы начать «работать», вполне может ограничиться представлением о некоей бесконечной таблице, в одной колонке которой стоят всевозможные пары точек, а в другой — неотрицательные числа — расстояния между соответствующими двумя точками. Точно так же топология может исходить из таблицы, в одной колонке которой находятся всевозможные пары, состоящие из некоторой точки множества и какой-то части множества, а в другой колонке каждой паре соответствуют слова «примыкает» или «не примыкает».

Однако реально вместо такой таблицы используются другие способы.

Один из важнейших и исторически первый способ задает топологию с помощью метрики. Пусть в некотором множестве задана метрическая структура, т. е. для любых двух

⁶ Это так называемая естественная топология, само название которой говорит о том, что можно ввести и другие («неестественные») топологические структуры на той же самой числовой оси.

точек известно расстояние между ними. Тогда скажем, что точка P примыкает к множеству M , если в M найдутся точки, находящиеся на сколь угодно малом расстоянии от P . Такая топологическая структура, как говорят, порождается, или индуцируется метрикой. Топологическая структура на числовой оси, подразумевавшаяся выше, индуцируется обычным расстоянием $\rho = |x - x'|$, которое превращает числовую ось в одномерное евклидово пространство E^1 .

Другой способ задания топологической структуры состоит в указании всех окрестностей каждой точки. Точка P примыкает к множеству M , если любая окрестность точки P содержит точки, принадлежащие M . Естественную топологию на числовой оси можно получить, если окрестностью точки P считать всякий интервал (a, b) , такой, что $a < P < b$. Как видим, здесь уже не требуется знать расстояния между точками. Но возможность говорить о «сколь угодно малых» окрестностях остается: говорят, что сколь угодно малые окрестности точки P обладают свойством C , если для любой ее окрестности O найдется окрестность O' , целиком содержащаяся в O и обладающая свойством C .

Вспомним теперь Аристотеля, который, как говорилось, пытался дать (не зная об этом) топологическое определение размерности исходя из понятия непрерывности. Естественно было бы объяснить, что топология понимает под непрерывностью пространства. Как это ни удивительно, понятия «непрерывное пространство» в топологии нет. Интуитивное представление о непрерывном пространстве оказалось слишком емким, слишком многосторонним, чтобы его можно было воплотить всего в одном математическом понятии. В топологии существует несколько понятий, отражающих разные стороны представления о непрерывном пространстве. Уже упоминавшаяся связность говорит о том, не распадается ли данная фигура на отдельные части. Топологическое понятие размерности, к которому пришел Пуанкаре и о котором будет говориться в главе 1, характеризует как раз интенсивность вмешательства, делающего фигуру не связной. Есть и другие топологические понятия, уточняющие, расшифровывающие свойство непрерывности пространства.

Однако в топологическом языке существует слово «непрерывность». К важнейшим в топологии относится понятие непрерывного отображения одного множества на другое. Отображение называется непрерывным, если оно примыкающие точки переводит в примыкающие. Если две

фигуры могут быть связаны отображением, непрерывным в обе стороны, или топологическим преобразованием, то они с точки зрения топологии являются неразличимыми, поскольку топологическая структура как раз и сводится к отношению примыкания. Если считать, что геометрическая фигура сделана из какого-то эластичного материала, то любая ее деформация без разрывов и склеек окажется топологическим преобразованием.

Приведем два примера топологических теорем.

Пусть дана некоторая замкнутая поверхность. Нанесем на нее произвольным образом некоторое количество точек, соединим эти точки отрезками линий так, чтобы вся поверхность оказалась разбитой на (криволинейные в общем случае) треугольнички. Обозначим общее количество точек буквой B , линий — буквой P , треугольников — буквой Γ . Тогда для любого топологического преобразования поверхности и любого такого разбиения величина $\chi = B - P + \Gamma$ имеет одну и ту же величину и называется эйлеровой характеристикой этой поверхности. Имя Эйлера здесь использовано неслучайно. Одна из первых по существу топологических теорем, доказанная Эйлером в XVIII в., гласила: для любого выпуклого многогранника $B - P + \Gamma = 2$, где B — число вершин, P — число ребер, Γ — число граней.

Второй пример уже непосредственно связан с темой этой книги. В 1911 г. Л. Брауэр доказал, что не существует топологического отображения, связывающего два евклидовых пространства E^n и E^m , если $n \neq m$. Тем самым было показано, что для пространства E^n число n — топологический инвариант. После этого, чтобы оправдать с точки зрения топологии слово « n -мерное» в названии пространства E^n , надо было придумать общее топологическое определение размерности, которое для топологического пространства E^n давало бы значение n . Это было вскоре сделано.

Теперь уже можно ответить на вопрос, что изучает топология. Она изучает различные типы топологических структур и их свойства, не меняющиеся при топологических отображениях.

ВОЗНИКНОВЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПОНЯТИЯ РАЗМЕРНОСТИ

Начало современной истории понятия размерности

История понятий размерности геометрических объектов и трехмерности физического пространства включает в себя, как уже говорилось, факты по меньшей мере двухтысячелетней давности. Однако имеет смысл рассмотреть специально последние примерно сто лет этой истории, начав с работ Анри Пуанкаре (1854—1912), а предшествующие этому столетию события можно назвать «предысторией» понятия размерности. Основание для этого можно увидеть в следующем.

Наибольшее на сегодняшний день обобщение физических представлений о размерности пространства дает топология, но возникновение топологии как самостоятельной области математики, во-первых, укладывается в рассматриваемый промежуток времени и, во-вторых, связано в большой степени с творчеством Пуанкаре. Он один из создателей топологии, ему принадлежит и первое, формально еще не вполне строгое топологическое определение размерности.

Пуанкаре был не только величайшим математиком своего времени, но и крупным физиком. Известна его активная роль в создании специальной теории относительности (СТО), означавшей радикальные изменения в представлении о пространстве и времени. Но и независимо от этого Пуанкаре, по его же словам, «неоднократно обращался к выяснению исходных начал геометрии и понятия пространства» [1]. Он, в частности, первый сделал факт трехмерности реального физического пространства предметом действительно научного анализа.

Удивительно многообразие интересов Пуанкаре. Глубокие и яркие его идеи, с избытком которых иногда не удавалось справиться ему самому¹, проникли практически

¹ Имея в виду некоторую неотшлифованность, живую стенографичность работ Пуанкаре, известный немецкий математик Г. Минковский писал как-то своему другу и не менее известному математику Д. Гильберту: «Я не могу заставить себя издавать свои труды в том виде, в каком издает их Пуанкаре» [2]. (Впрочем, это не мешало Минковскому называть Пуанкаре

во все области математики, в небесную механику и физику. Эта физико-математическая универсальность Пуанкаре была как нельзя кстати при рассмотрении проблемы размерности пространства — действительно физико-математической проблемы.

Пуанкаре — один из величайших представителей классической математики и классической физики — жил в эпоху, когда в этих науках происходили революционные изменения, связанные с возникновением теории множеств и теории относительности. Он имел непосредственное отношение к этим изменениям и очень много сделал для победы обеих теорий. С его помощью по словам П. С. Александрова, были «взорваны изнутри» традиции классической науки. Он, плодотворно применяя теорию множеств, созданную Г. Кантором (1845—1918), способствовал проникновению ее методов в различные области математики. Созданием топологии Пуанкаре открыл для математики «целый мир новых проблем... по своему существу недоступный не только методам, но и самому... мировоззрению „классической“ математики...» [3]. Значителен также вклад Пуанкаре в создание СТО. В его работах содержится практически весь математический аппарат СТО; основу этого аппарата — группу Лоренца — он указал со всей математической ясностью.

Однако на отношении Пуанкаре к обеим революционным теориям сказалось то, что его взгляды сформировались под воздействием классической математики и классической физики. Когда обнаружились парадоксы теории множеств и началась ее перестройка на аксиоматической основе, Пуанкаре не только отверг этот, как оказалось позже, основной для неклассической математики способ построения теории, но и отказался от фундаментального для теории множеств понятия актуальной бесконечности. В случае теории относительности дело обстоит несколько иначе, но и здесь Пуанкаре, создавший по существу весь математический аппарат теории и осознавший, например, еще раньше Эйнштейна неабсолютность понятия одновременности,

величайшим математиком в мире.) В работах Пуанкаре, посвященных общим вопросам науки, эта особенность видна еще яснее. Встречаются иногда даже формально противоречащие друг другу утверждения, в чем мы еще убедимся. Однако для современного читателя это оказывается даже преимуществом, поскольку дает возможность узреть не только о новых идеях, но и о водняющем *процессе рождения* новых идей.

так и не перешел полностью на новую релятивистскую программу. Свою последнюю статью на эту тему он заканчивает словами: «Теперь некоторые физики хотят принять новое соглашение (имеется в виду объединение понятий „пространство“ и „время“ в понятие „пространство-время“. — Г. Г.). Это не значит, что они были вынуждены это сдехать; они считают это новое соглашение более удобным, вот и все; и те, кто не придерживается этого рода мыслей, могут вполне законно сохранить старый, чтобы не нарушать своих старых привычек» [4].

Почему Пуанкаре обратился к проблеме размерности пространства? Почему его можно назвать создателем топологии? Эти вопросы почти совпадают, так как для Пуанкаре основным и даже единственным свойством пространства с точки зрения топологии является «свойство быть непрерывностью трех измерений» [5].

Но действительно ли Пуанкаре можно называть создателем топологии? Ведь, например, известный французский математик Н. Бурбаки (под этим именем пишет книги коллектив выдающихся французских математиков) основателем топологии пазывает Римана и убедительно обосновывает это. Да и сам Пуанкаре говорил о Римане как об основателе топологии.

Если использовать (к сожалению, заезженное) сравнение знания с факелом, то начальный период развития науки можно сравнить с эстафетой, в которой этот факел передается из рук в руки учеными — участниками эстафеты (для топологической теории размерности это — Риман, Бетти, Кантор, Пуанкаре).

И наконец, от этого одного факела зажигается сразу несколько факелов — это и есть момент превращения «линейного», «одномерного» развития науки в «многомерное».

Этот момент определяется и внутринаучными, и внешними, социально обусловленными причинами. Каждого из ученых, чья деятельность относится к «эстафете», можно с полным правом считать создателем новой области, так как участие каждого жизненно важно для судьбы новой области. Важно, конечно, и обнаружение новой области исследований (что по отношению к топологии сделал Риман), и становление ее в самостоятельную науку. Последнее и есть заслуга Пуанкаре, обнаружившего плодотворность топологического подхода в различных областях математики. Он писал: «Что касается меня, то все различные пути, на которых я последовательно находился, приводили меня к

Analysis situs², к осознанию его крайней важности для математики в целом».

Особенно велико было продвижение Пуанкаре в выяснении понятия n -мерного пространства. Действительно, Б. Риман (1826—1866), для которого топология в не меньшей степени, чем для Пуанкаре, связана с понятием размерности, в своей знаменитой лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» [6] в первую очередь «поставил перед собой задачу — исходя из общего понятия о величине, сконструировать понятие многократно протяженной величины». Однако конструкция « n -кратно протяженной величины», которой удовлетворился Риман, очень неопределенна. «Однократно протяженное многообразие» он определяет возможностью «непрерывного смещения... лишь в две стороны — вперед и назад», $n+1$ -мерное многообразие — это совокупность всех «состояний», которые могут быть получены при переведении «определенным образом» n -мерного многообразия в иное, «вполне отличное» n -мерное многообразие.

Мы увидим вскоре, насколько далеко шагнул Пуанкаре в определении понятия размерности пространства.

Но что же привело Пуанкаре к вопросу: «Почему пространство имеет три измерения». Ответ может быть следующим. Вторая половина XIX в. с точки зрения истории математики была эпохой неевклидовой геометрии. Именно тогда неевклидова геометрия получила полное признание в математике. Отказ от априорной единственности евклидовой геометрии, возможность нескольких (а после работ Римана — бесконечного числа) геометрий произвели громадное впечатление на математиков того времени, и в частности на Пуанкаре. Он немало сделал для самой неевклидовой геометрии и неоднократно привлекал идеи неевклидовой геометрии при обсуждении проблем пространства. С другой стороны, от момента создания неевклидовой геометрии его отделяло некоторое время, и он уже мог взглянуть на происшедшее «с высоты птичьего полета».

Естественно предположить, что такой отказ от устройства пространства, казавшегося единственно возможным, побудил Пуанкаре к анализу других, еще более фундаментальных свойств пространства, «уцелевших» при переходе от евклидовой геометрии к неевклидовой, в частности его

² Analysis situs (анализ положения) — первоначальное, принадлежавшее Лейбницу название топологии.

трехмерности. Не случайно Пуанкаре обсуждает одновременно возможности как неевклидова, так и четырехмерного устройства физического пространства (см. ниже). Это ясно показывает условность выделения истории какой-то одной определенной концепции в математике.

Психологизм Пуанкаре

В обзоре собственных работ в 1901 г. Пуанкаре пишет: «Я занимался... анализом психологических исходных начал понятия пространства». Психологический аспект происхождения понятий не просто вызывал его интерес, а был существенным элементом его методологической установки и распространялся не только на геометрические понятия. Так, например, связывая свой отказ от понятия актуальной бесконечности с психологическими соображениями, он пишет: «Рассел³, без сомнения, мне скажет, что он занимается не психологией, но логикой и теорией познания; я же принужден буду ответить, что нет логики и теории познания, независимых от психологии» [7].

Важнейший результат такого анализа — материалистический вывод об определяющем влиянии внешнего мира на геометрические представления. Главу «Пространство и геометрия» в книге «Наука и гипотеза» (1902) Пуанкаре начинает, как он пишет, «с маленького парадокса», состоящего в том, что существа, ум и органы чувств которых были бы подобны нашим, «могли бы получить от соответственно подобранного внешнего мира такие впечатления, что им пришлось бы построить Геометрию иную, чем Евклидова, и разместить явления этого внешнего мира... даже в пространстве четырех измерений».

С материалистической точки зрения в этом примере, который Пуанкаре приводил неоднократно, нет ничего парадоксального. Это исходный пункт материалистической теории познания. Впрочем, по-видимому, парадоксальной Пуанкаре считал саму возможность говорить о неевклидовой или четырехмерной геометриях как реальных хотя бы для воображаемых существ. Вывод об определяющем влиянии внешнего мира Пуанкаре основывал на очень (можно даже сказать слишком) подробном психологическом рассмотрении «представляемого пространства» в фор-

³ Известный английский математик и философ Б. Рассел (1872—1970).

мах «зрительного, осязательного и двигательного пространств». Слишком подробного, потому что кажется несколько наивной попытка с помощью только такого анализа обосновать влияние внешнего мира на формирование научных представлений. Значительно более полезна для этой цели концепция практики, берущая начало с «Тезисов о Фейербахе» К. Маркса и включающая в себя не только практику индивидуума-исследователя, но и общественно-историческую практику. Концепция практики учитывает, в частности, что перед тем, как исследователь начинает изучать свойства пространства, он получает (осознанно и неосознанно) огромную информацию, во-первых, в процессе своего биологического развития и, во-вторых, в виде социально-приобретенных знаний. Конечно, проблема формирования у отдельного человека пространственных представлений важна и интересна, но все-таки это проблема в основном психологии.

В «парадоксе», рассматриваемом Пуанкаре, сомнительно уже предположение о сходных с нашими уме и органах чувств воображаемых существ. Физический анализ Эренфеста показал, что если и можно представить некие существа в четырехмерном мире, то их «устройство», скорее всего, должно было бы радикально отличаться от нашего. Кроме того, безупречен и анализ «представляемого пространства», проведенный Пуанкаре. Он начинает с «зрительного пространства» и пишет, что это пространство «совершеннее пространства осязательного», в частности, потому, что «при желании ему можно придать три измерения» (два измерения соответствуют двумерности сетчатки, а третье — глубина — дается ощущением угла между лучами зрения от обоих глаз), в то время как «осязательное пространство», по мнению Пуанкаре, двумерно (поскольку ощупывается всегда поверхность). Он ставит вопросы, «почему геометрия слепых та же, что и наша» и почему комбинация зрительного и осязательного пространств не дает нам $5(3+2)$ измерений. Решение этих вопросов он пытается связать с рассмотрением последовательности ощущений и привлечением «двигательного пространства». Его анализ трудно назвать вполне убедительным. Пуанкаре не рассматривает, например, «слухового пространства» — одного из самых важных для незрячего человека. Кроме того, есть люди, слепоглухие от рождения или с раннего детства, и тем не менее у них формируются пространственные представления, достаточные не только для успешного биологи-

ческого, но и для подлинного человеческого существования [8].

Все это показывает еще раз, что отношения человека с пространством намного сложнее, чем отношения исследователя, сознательно формирующего свои представления с помощью различных специально поставленных экспериментов (а Пуанкаре рассматривает именно такое отношение). Если бы психологический анализ и мог решить проблему формирования представлений о пространстве, то только в индивидуальном плане. Научные представления, наука в целом — это сложная социализированная форма культуры, соответствующая достаточно высокому уровню развития общества. И только концепция практики способна решить проблему формирования научных представлений о пространстве и проблему истинности этих представлений. А что касается индивидуума, то здесь необходимо учитывать накопленную и передаваемую ему обществом информацию.

Анализ Пуанкаре приводит к выводу о направляющей роли опыта, о вторичности геометрических представлений и, в частности, о размерности пространства по отношению к внешнему миру. И хотя обоснование размерности, скажем, такого типа: «Пространство трехмерно, так как элементы наших зрительных ощущений вполне определены, если известны три из них» [9] — нельзя считать полностью удовлетворительным, но указание на неаприорность размерности очень плодотворно.

Удивительным кажется то, что Пуанкаре считал возможным совместить утверждение об определяющем влиянии внешнего мира с утверждением о большом значении априорных элементов: «В нашем уме предсуществовала скрытая идея известного числа групп; это — те группы, теорию которых создал Ли⁴; ...мы все обладаем интуицией непрерывности любого числа измерений, так как имеем способность построить непрерывность как физическую, так и математическую; ...эта способность существует в нас до всякого опыта, так как без нее опыт в собственном смысле слова был бы невозможен...» [10]. Кратко говоря, Пуанкаре

⁴ С этим вряд ли согласились бы даже те относительно немногие читатели, которые знают, что такое «группы Ли». Так мог сказать только математик, для которого глубокие математические понятия в результате активного их использования стали формой интуиции.

не учитывал, что всякое «до опыта» — это «после всего предыдущего опыта».

С психологизмом Пуанкаре связаны очень интересные и важные для истории понятия размерности обстоятельства. Обычно указывают на статью Пуанкаре 1912 г. «Почему пространство имеет три измерения?» как на первое появление идеи индуктивного топологического определения размерности (на основе этой работы Л. Брауэр в 1913 г. дал точное индуктивное определение размерности). На самом деле эта идея появилась на десять лет раньше. И появилась она именно на «психологическом» направлении размышлений Пуанкаре, когда он пытался сконструировать «физическую непрерывность многих измерений» только на основе «непосредственных данных наших чувств». Однако, по-видимому, именно психологическое происхождение этой идеи воспрепятствовало тому, чтобы сам Пуанкаре сразу же превратил ее в точную математическую конструкцию (ведь эта идея была высказана с далекой от математики целью). В противном случае было бы непонятно, почему Пуанкаре не хватило десяти лет на точное математическое оформление этой идеи. Такой вопрос не возник бы, если бы эта идея действительно появилась впервые в работе 1912 г., в год смерти Пуанкаре.

Пуанкаре не был бы физиком, если бы, заинтересовавшись проблемой размерности, он ограничился психологическим подходом к ней и не поставил бы вопрос об отношении физики к размерности пространства. Однако, прежде чем перейти к этому вопросу, выясним, что значит для Пуанкаре само утверждение о трехмерности пространства.

Размерность пространства и топология

У Пуанкаре можно найти два существенно различных подхода к понятию размерности — параметрический и топологический. В первой из его книг по общим вопросам науки «Наука и гипотеза», вышедшей в 1902 г., присутствуют сразу оба подхода.

Параметрическая размерность. Пуанкаре пишет, что полное зрительное пространство «имеет как раз три измерения; т. е. элементы наших зрительных ощущений... будут вполне определены, когда известны три из них; выражаясь математическим языком, они будут функциями трех независимых переменных».

Подобный подход, основанный на параметрическом «определении» размерности, по существу до сих пор подразумевается в физике. Кавычки соответствуют тому, что параметрическое определение размерности (по крайней мере в форме: «Размерность пространства — это минимальное число параметров, которые необходимы, чтобы отличать точки пространства друг от друга») математически некорректно. Это стало ясно после построенного Георгом Кантором (1845—1918) знаменитого примера взаимно-однозначного соответствия между множествами точек квадрата и отрезка.

Этот пример настолько же прост, насколько и важен для проблемы математического описания размерности пространства. Путь, которым Кантор пришел к этому результату, был примерно таким. Создание Кантором теории множеств началось по существу с понятия мощности бесконечного множества (обобщающего понятие количества элементов конечного множества). Но это понятие получило бы смысл только тогда, когда были бы указаны конкретные математические объекты, представляющие собой бесконечные множества различной мощности. Другими словами, надо было найти бесконечные множества, между которыми нельзя было бы установить такого соответствия, когда каждому элементу одного из множества отвечает один и только один элемент другого.

Геометрические фигуры разной размерности казались подходящими кандидатами на роль бесконечных множеств различной мощности. Действительно, в плоской фигуре, например в квадрате, точек, казалось бы, в бесконечное число раз больше, чем в отрезке. Кантор в течение трех лет пытался доказать этот интуитивно очевидный факт. Такое различие двух бесконечностей, если бы оно действительно существовало, могло бы стать основой для определения размерности. Однако в результате своих попыток Кантор с удивлением обнаружил, что эти два множества равномощны: ему удалось установить взаимно-однозначное соответствие между элементами этих множеств.

Сообщая в 1877 г. о своем открытии Дедекинду, Кантор в письме, написанном по-немецки, не удержался от эмоций и выразил их словами, написанными по-французски: «Я вижу это, но не верю этому».

Само соответствие устроено просто. Не стремясь к особой строгости, его можно описать так. С точки зрения математики единичный отрезок можно представить как со-

вокупность всех действительных чисел от 0 до 1, а единичный квадрат — как совокупность всех пар действительных чисел $(a; b)$, каждое из которых расположено между 0 и 1 (это координаты точек квадрата). Тогда, записывая координаты точек квадрата и отрезка в виде десятичных дробей, можно построить необходимое соответствие $(a; b) \leftrightarrow c$ таким образом:

$$(0, a_1 a_2 \dots; 0, b_1 b_2 \dots) \leftrightarrow 0, a_1 b_1 a_2 b_2 \dots,$$

где a_i, b_i обозначают всевозможные цифры от 0 до 9. Это соответствие каждой точке квадрата сопоставляет некоторую точку отрезка, причем различным точкам квадрата соответствуют различные точки отрезка.

Таким образом, оказалось, что множества различной размерности имеют одинаковую мощность. Это означало, что с помощью только понятия мощности нельзя определить, что такое размерность.

Однако параметрическое определение имело настолько ясный смысл, вполне согласующийся с обычным в физике понятием числа степеней свободы, что даже математик Пуанкаре в 1902 г. не мог отказаться от этого интуитивно ясного определения (физики не отказались и до сих пор). Он, правда, употребляет его только для «полного зрительного пространства» и не пытается дать корректное математическое определение, основанное на этой идее. И даже в одной из последних статей 1912 г., где уже содержится математически отчетливая идея топологического определения размерности, остались все-таки следы параметрических представлений.

Параметрические представления о размерности могли удовлетворить физику, использовавшую довольно простые геометрические фигуры, но в геометрии, изучающей всевозможные фигуры, как раз в конце XIX в. обнаружилась недостаточность простых параметрических представлений. Казалось ясным, например, что всякая линия должна быть одномерна. Но что такое «всякая линия»? Долгое время математиков удовлетворяло такое определение: линия — это всякая фигура, которую можно получить непрерывным преобразованием отрезка прямой; точка, пробегающая отрезок, параметризовала бы линию непрерывным образом. Это определение по существу лишь уточняет древнее представление: «Линия — след движущейся точки». Однако в 1890 г. итальянский математик Дж. Пеано (1858—1922) построил пример линии, запол-

няющей целиком квадрат на плоскости, т.е. построил *непрерывное* отображение отрезка (одномерной фигуры) на квадрат (двумерную фигуру). Этот пример поразил математиков не меньше канторовского⁵. Оказалось, что математическая интуиция может ошибаться не меньше, чем любая другая. Возникшую ситуацию, по-видимому, глубже других осознавал Пуанкаре. Нужно было искать замену параметрических представлений о размерности.

Индуктивное топологическое определение размерности. Новый (радикально отличающийся от параметрического) подход Пуанкаре к размерности пространства возник при анализе понятия непрерывности, в особенности «физической непрерывности». Именно при анализе «физической непрерывности многих измерений» появилась идея, которой суждено было превратиться в первое топологическое определение размерности. Определение «математической непрерывности многих измерений» не доставляет многих беспокойств Пуанкаре, по-видимому, потому, что он в 1902 г. считает еще достаточным параметрическое определение этого понятия: «Точка подобной непрерывности, как известно, представляется нам определенной при помощи системы отдельных величин, называемых ее координатами» [11].

Даже в 1912 г. Пуанкаре считает «безупречным с точки зрения математики» определение: «Непрерывность n измерений есть совокупность n координат, т.е. совокупность n количеств, могущих изменяться независимо одно от другого и принимать все вещественные значения, удовлетворяющие определенным неравенствам» [12]. В этой работе остались следы параметрического определения размерности, по подчеркивается, что «вопрос числа измерений тесно связан с понятием непрерывности и теряет всякий смысл для того, кто пожелает отвлечься от этого понятия». И действительно, как мы увидим, Пуанкаре рассматривает многомерность как обобщение простейшего случая непрерывности, соответствующего числовой прямой. Приведенное выше определение, считает Пуанкаре, безупречно с точки зрения математики, но «не удовлетво-

⁵ Построенное Кантором соответствие не было непрерывным (подробнее об этих примерах можно узнать из книг: Виленкин Н. Я. Рассказы о множествах. М.: Наука, 1965; Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967; Хан Г. Кризис интуиции. — В кн.: Математики о математике. М.: Знание, 1972).

ряет философа», мало считается с интуитивным происхождением понятия непрерывности. И только поэтому Пуанкаре ищет другое определение размерности.

В 1902 г. Пуанкаре, рассматривая понятие физической непрерывности как первичное, связывает его с так называемым законом Фехнера. Этот закон можно иллюстрировать следующим образом. Пусть некоторый человек — «экспериментатор» — занимается тем, что на глаз определяет относительную длину различных отрезков. Допустим, что минимальная разница, которую этот человек может заметить (когда, скажем, речь идет об отрезках длиной от одного до двух метров), равна 1,5 см. Пусть этому человеку даны три отрезка: A — длиной 100 см, B — 101 см и C — 102 см. Тогда наш экспериментатор, рассматривая отрезки попарно, может сказать, что $A = B$, $B = C$, но $A < C$. Как пишет Пуанкаре: «Голые результаты опыта могут быть, следовательно, выражены следующими соотношениями: $A=B$, $B=C$, $A < C$, которые можно рассматривать как формулы физической непрерывности» [13]. Здесь по существу имеется в виду тот факт, что физически могут быть различимы только величины, отличающиеся не меньше, чем на некоторую конечную величину (порог различимости). Ясно, что речь идет скорее о физико-психологической или даже (если не бояться удручающе длинных слов) о физико-психофизиологической непрерывности.

Пуанкаре анализирует понятие «физической непрерывности многих измерений», и именно здесь появляется его идея будущего топологического определения размерности. Он характеризует одномерную физическую непрерывность тем, что ее можно «подразделить... удаляя из нее конечное число различимых друг от друга элементов». Если подразделение непрерывности C «достигается вырезками, которые являются непрерывностями одного измерения, то мы скажем, что C имеет два измерения», и т. д. [14].

В 1902 г. Пуанкаре еще не заменяет слова *различимые элементы* на *точки* и не переносит это определение на случай математической непрерывности n измерений. Хотя он и пишет, что математическая непрерывность вытекает совершенно естественно из понятия физической непрерывности, но характеризует первую всего лишь тем, что «точка подобной непрерывности, как известно, представляется нам определенной при помощи системы n раздельных величин, называемых ее координатами». Утверждение о трехмерности пространства Пуанкаре раскры-

вает так: «И когда мы говорим, что пространство имеет три измерения, мы хотим сказать просто, что совокупность этих классов (изменений, мускульных ощущений — образов точек. — Г. Г.) выступает перед нами с характерными чертами физической непрерывности трех измерений».

В работе 1912 г. хотя и говорится о нематематической (интуитивной, философской) потребности в новом определении, само определение дается на полностью математическом языке (без указания на происхождение из «голых чувственных данных», без слов «различимые элементы» и т. п.). «Непрерывность имеет n измерений, когда ее можно разбить на несколько частей, произведя в ней одно или несколько сечений, которые сами являются непрерывностями $n - 1$ измерений. Непрерывность n измерений, таким образом, определяется через непрерывность $n - 1$ измерений; это — рекуррентное определение» [15].

Рекуррентными, или индуктивными, называются в математике определения (а также доказательства, соотношения и т. д.), в которых некоторое свойство, характеризующее числом n , определяется через свойство, характеризующее числом $n - 1$. При этом, конечно, должен быть задан начальный пункт индуктивной цепочки. Для Пуанкаре начальным пунктом была одномерность — простейший вид непрерывности. Однако, как выяснилось позже, удобнее в качестве начального пункта индукции взять нульмерность, а чтобы определение сохранило свой вид, пустому множеству (т. е. «множеству», не содержащему ни одного элемента) надо формально приписать размерность -1 (минус единица).

Далее Пуанкаре пишет, что веру в это определение ему дает прежде всего (восходящее еще к «Началам» Евклида) представление о том, что поверхность — это граница тела, линия — граница поверхности и точка — граница линии, — представление, которое дают «многие авторы элементарных учебников». Затем он подчеркивает важность в топологии понятия сечения («на сечении все основано») и в связи с этим напоминает, что, по Риману, отличие сферы от тора выражается с помощью сечений: на торе (в отличие от сферы) не любая замкнутая кривая разделяет его на две части. Это указание на источники веры в новое определение говорит не столько о происхождении самого определения, сколько о качественно другом уровне нового понятия.

Сравнивая определение Пуанкаре с современными топологическими определениями размерности (см. Дополнение), можно видеть, что конструкция Пуанкаре соответствует так называемой большой индуктивной размерности Ind: размерность пространства X равна n , если между любыми двумя замкнутыми непересекающимися множествами в X найдется перегородка размерности $n - 1$, при этом размерность пустого множества считается равной -1 (естественно определяемое понятие перегородки соответствует тому, что Пуанкаре называет сечением).

Таким образом, мы видим, что размерность пространства — фундаментальное понятие топологии — возникло если и не прямо из физики, то, во всяком случае, с ее помощью, на основе размышлений над физическими понятиями.

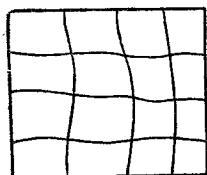
Размерность и свойства покрытий. С творчеством Пуанкаре связано еще одно интересное обстоятельство в истории топологических определений размерности.

Обычно указывается, что идея индуктивного топологического определения размерности появилась в работе Пуанкаре 1912 г. На самом деле, как мы видели, вполне отчетливая идея этого определения была уже в работе Пуанкаре 1902 г., и, по-видимому, именно здесь эта идея появляется впервые. Во всяком случае, в обзоре собственных работ, сделанном Пуанкаре в 1901 г. [16], нет никаких следов индуктивного подхода.

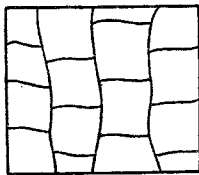
Если мы обратимся к одной из самых больших предшествующих работ Пуанкаре об основаниях геометрии — статье 1898 г. [17], то и там не найдем никаких намеков на индуктивное определение. Это дает возможность установить время рождения идеи индуктивного определения с точностью до года — 1901 г. Но если в статье 1898 г. нет индуктивного определения, то есть нечто не менее удивительное. Пуанкаре и здесь ставит вопрос о внутренней (топологической, сказали бы мы) характеристике n -мерного пространства, не связанной с представлением о независимо изменяющихся величинах — координатах. Вот каким образом Пуанкаре пытается дать такую характеристику.

«Представим себе совокупность плоских фигур, частично накрывающих одна другую таким образом, что плоскость оказывается полностью покрытой ими; или лучше представим себе что-то аналогичное в пространстве

трех измерений. Если бы такие фигуры, налагаясь, образовывали нечто вроде одномерной ленты, мы могли бы распознать это, потому что связь между этими фигурами... подчиняется закону, который можно сформулировать так: если A связано одновременно с B , C и D , то D связано с B или C . Этот закон не выполнялся бы, если бы фигуры, налагаясь, покрывали плоскость или пространство больше-



a



b

Рис. 1. Достаточно мелкое покрытие двумерной фигуры не может иметь кратность меньше 3

a — кратность покрытия равна 4;

b — кратность покрытия равна 3

го, чем два, числа измерений. Таким образом, когда я говорю, что все возможные положения образуют совокупность одного измерения или больше, чем одного измерения, я имею в виду, что этот закон выполняется или не выполняется.

Когда я говорю, что они образуют совокупность двух или трех измерений, я просто утверждаю, что выполняются некоторые аналогичные законы».

Таковыми неопределенными словами в 1898 г. Пуанкаре пытается связать понятие n -мерности со свойствами покрытий. Конечно, никаких окончательных результатов здесь нет, и если одномерная «совокупность» охарактеризована хоть каким-то образом, то о большем числе измерений сказано только то, что должны выполняться «аналогичные законы».

Эти законы были открыты в 1911 г. замечательным французским математиком А. Лебегом (1875—1941), обнаружившим связь между размерностью и кратностью покрытий. Кратность покрытий — это наибольшее число элементов покрытия, имеющих хотя бы одну общую точку (рис. 1). Теорема Лебега утверждает, что минимальная кратность покрытия n -мерного евклидова пространства равна $n + 1$. Такая связь кажется неожиданной, и по словам известных советских математиков П. С. Александрова и Б. А. Пасынкова, теорема Лебега — «подлинная жемчужина геометрической мысли и геометрической фанта-

зии; бессмертной заслугой Лебега является уже самая ее формулировка» [18].

Впоследствии эта теорема превратилась еще в одно топологическое определение размерности: размерность фигуры равна n , если минимальная кратность сколь угодно мелких ее покрытий равна $n + 1$.

Хотя, как мы видели, попытка Пуанкаре связать размерность со свойствами покрытий не была удачной, направление его размышлений могло индуцировать идею Лебега.

Размерность пространства и физика

Вернемся теперь к собственно физическому анализу размерности в работах Пуанкаре. Сразу же отметим, что если в математических размышлениях Пуанкаре явственно чувствуется подход физика, оказавшийся, как мы видели, очень плодотворным, то в физическом анализе не менее отчетливо виден подход математика, и этот подход, к сожалению, в данном случае нельзя назвать плодотворным.

Хотя Пуанкаре и называет экспериментальными фактами результаты своего психофизиологического анализа, он ясно видит возможность иной точки зрения: «Мы до сих пор становились на точку зрения чисто субъективную, чисто психологическую, или, если угодно, психофизиологическую; мы рассматривали только отношение между пространством и нашим чувством. Можно было бы, наоборот, встать на точку зрения физики и задать вопрос: нельзя ли локализовать явления природы в пространстве, отличном от нашего, например, двух или четырех измерений?» [19]. И далее следует четкая постановка проблемы: «Законы физики выражаются дифференциальными уравнениями, в этих уравнениях фигурируют *три* координаты материальных точек. Разве не возможно выразить эти законы другими уравнениями, где фигурировали бы в этом случае другие материальные точки, имеющие *четыре* координаты?» (Кстати, из этой же постановки видно, что физика навязывает именно параметрическое, координатное представление о размерности. Поэтому нелегко было математике «избавиться» от него, и если говорить точно, то полностью избавиться так и не удалось: размерность линейного пространства — это конкретная реализация идеи параметрического определения.).

Сразу после формулировки проблемы Пуанкаре указывает возможные ответы: «Но, может быть, если это возможно, полученные таким способом уравнения окажутся менее простыми? Или, наконец, если они оказываются такими же простыми, то не отбрасываем ли мы их просто потому, что они противоречат нашим умственным привычкам?» Пуанкаре, как мы увидим, предопределяет результаты анализа, и поэтому анализа как такового у него нет. В этой связи отметим, что физик Эренфест, поставив в такой же форме вопрос о трехмерности пространства, дал действительно глубокий и плодотворный по своим идеям физический анализ, не подгоняя его под заранее подготовленный ответ.

Пуанкаре начинает с анализа фразы «выражение *тех же законов другими уравнениями*» и пишет: «Мы можем сказать, что оба мира подчинены тем же законам» в случае, если есть «параллелизм», соответствие между совокупностями всех явлений, возможных в этих мирах. Пуанкаре считает (не обосновывая это) такое соответствие возможным, и даже, как можно понять из его слов, возможным всегда. На самом же деле параллелизм двух «миров» разных размерностей невозможен. Указание на радикальное отличие физических законов в пространствах разных размерностей как раз и составляет основной результат Эренфеста.

Пуанкаре пишет, что «достаточно рассмотреть простой случай астрономических явлений и законы Ньютона». По его словам, в законы небесной механики должны входить не координаты звезд, а только их взаимные расстояния. Эти расстояния, являющиеся в 3-мерном пространстве функциями от 6 ($= 2 \times 3$) координат, заменяются в предположении 4-мерности пространства на функции от 8 ($= 2 \times 4$) координат. Затем он сразу утверждает: «Ясно только, что полученные таким образом уравнения окажутся гораздо менее простыми, чем наши обыкновенные уравнения. Конечно, то же произойдет и с законами физики». Уверенные слова «ясно» и «конечно» никак не компенсируют отсутствие действительных аргументов.

В этом и проявляется предопределенность ответа, связанная, по-видимому, с общей методологической установкой Пуанкаре, которая вкратце сводится к следующему: геометрическая модель реальности неоднозначна, поскольку в экспериментах имеют дело не с самой по себе такой моделью, а с сочетанием определенной геометри-

ческой модели и определенной физической теории; поэтому модель выбирается из соображений простоты и удобства.

Как же Пуанкаре пытался проиллюстрировать (иначе это назвать нельзя) возможность приписать физическому пространству число измерений, не равное трем. Эта иллюстрация, строго говоря, не имеет отношения к физике, хотя при ее анализе и надо обсуждать такие вопросы, как инерциальная система, принцип Маха и принцип относительности. Действительно, Пуанкаре пишет: «Мы наблюдаем не координаты звезд, но только их взаимные расстояния; естественным изображением законов их движения должны быть дифференциальные уравнения, связывающие эти расстояния со временем».

Может быть, и «должны», но, как, известно, кроме взаимных расстояний в динамике Ньютона есть еще и понятие инерциальной системы отсчета, и понятие абсолютного пространства. То, что эти элементы ньютоновской механики вызывали сомнения, начиная с Лейбница, у многих физиков (включая и Эйнштейна, для которого эти сомнения сыграли конструктивную роль при создании ОТО), не дает основания игнорировать их.

Вот простейший контрпример к утверждению Пуанкаре. Рассмотрим две ситуации:

1) две «звезды» находятся на постоянном расстоянии друг от друга из-за вращения (относительно инерциальной системы отсчета);

2) поместим те же две звезды па то же расстояние, пусть эти звезды вначале покоятся, а мы будем наблюдать за их движением из вращающейся с соответствующей скоростью (неинерциальной) системы отсчета.

Несмотря на то что «взаимные расстояния» и скорости в обоих случаях вначале совпадают, в дальнейшем расстояние между звездами меняется по-разному: в первом случае — сохраняется, во втором — уменьшается. Так что законы движения включают в себя не только взаимные расстояния.

Но Пуанкаре не учитывает еще более важное в данном случае обстоятельство. Он фактически подразумевает, что при переходе от трехмерного к четырехмерному пространству закон тяготения остается тем же (сила пропорциональна r^{-2} , где r — расстояние между двумя точками), так как он говорит только о замене r на функцию от восьми (4×2) координат, т. е. в 4-мерном пространстве

по-прежнему

$$F \sim r^{-2},$$

где уже $r^2 = \sum_{k=1}^4 (x_k - x'_k)^2$, а не $r^2 = \sum_{k=1}^3 (x_k - x'_k)^2$.

Но в 4-мерном пространстве закон $F \sim r^{-2}$ несовместим с принципом суперпозиции (этот закон уже не порождается линейным уравнением Лапласа), несовместим, в частности, с тем, что гравитационное поле шара эквивалентно полю находящейся в центре точки с массой, равной массе шара. Таким образом, параллелизм совокупностей явлений не достигнут, что означает безуспешность физического анализа проблемы размерности, проводимого Пуанкаре.

На самом деле в n -мерном пространстве сама зависимость силы F от r должна быть другой:

$$F \sim 1/r^{n-1}.$$

Учет этого и позволил Эренфесту пять лет спустя добиться подлинного успеха в анализе проблемы размерности пространства.

Дискретность в квантовой физике и понятие размерности пространства-времени

Последние 12 лет жизни Пуанкаре — это первые 12 лет квантовой физики. Заинтересовавшись новыми квантовыми идеями только в последние год-два своей жизни, Пуанкаре тем не менее глубоко проник в существо этих идей. Несмотря на тогдашнее состояние квантовой теории (еще не было даже модели атома Бора), он осознал фундаментальность положения о дискретности множества возможных значений физической величины и плодотворно участвовал в обсуждении квантовых идей.

Работы Пуанкаре 1912 г., связанные с квантовыми идеями, интересны, во-первых, тем, что здесь впервые естественным образом (из физики) появляющаяся дискретность сталкивается с вопросом числа измерений пространства, который, по словам Пуанкаре, «тесно связан с понятием непрерывности и теряет всякий смысл для того, кто пожелает отвлечься от этого понятия» [20]. А во-вторых, эти работы дают возможность дополнительно прояснить такой важный вопрос в истории специальной теории относительности, как роль Пуанкаре в создании

представлений о четырехмерном пространстве-времени. Объединение понятий трехмерного пространства и одномерного времени в понятие четырехмерного пространства-времени, о котором подробнее будет говориться в следующей главе, стало одним из самых важных изменений в физической картине мира за все время существования науки.

Квантовые и пространственно-временные идеи оказались связанными у Пуанкаре следующим образом.

В статье «Гипотеза квантов» Пуанкаре, анализируя путь Планка к его спектру теплового излучения, приходит к выводу, что предположение Планка о возможных состояниях элементарных осцилляторов естественно обобщить на любую физическую систему: «Физическая система обладает конечным (точнее было бы сказать, дискретным.— Г. Г.) числом различных состояний: она перескакивает из одного состояния в другое, не проходя через непрерывный ряд промежуточных состояний» [21].

Обратим внимание, какой пример множества состояний приводит Пуанкаре: «Допустим, простоты ради, что состояние системы зависит только от трех параметров, так что мы можем представить его геометрически точкой в пространстве. Ансамбль точек, изображающих различные возможные состояния, не заполняет полностью пространство или какую-либо область пространства, как обычно предполагается, а представляет собой большое число точек, изолированных в пространстве. Правда, эти точки распределены очень густо, что и создает у нас иллюзию непрерывности». Что это, как не параметрическое представление о размерности пространства? Несмотря на то что математик Пуанкаре знает о некорректности параметрического определения, физик Пуанкаре совершенно естественно пользуется параметрическим языком для описания трехмерности пространства состояний. Он рассматривает возможность не только «точечного», нульмерного множества возможных состояний, но и одномерного или двумерного, по-прежнему полагая, что состояние физической системы, зависящей только от трех параметров, естественно изображается точкой трехмерного пространства.

Может быть, Пуанкаре имел в виду только пространство состояний, а не физическое пространство? Это не так уж и существенно, поскольку линейка — физический прибор для измерения длины — это тоже физическая си-

стема, состоящая из атомов, множество состояний которой должно быть дискретным. Но более важно то, что Пуанкаре подошел очень близко к представлению о возможной дискретности пространства, и как раз то, что он так и не увидел этой возможности, проясняет упомянутый выше вопрос о роли Пуанкаре в создании релятивистских представлений.

Сложность этой проблемы подтверждается уже обширностью литературы, посвященной ей [2]. Кратко говоря, дело обстоит так. В работе Пуанкаре 1906 г., совершенно независимой от знаменитой работы Эйнштейна 1905 г., содержится практически весь математический аппарат СТО. Эта работа перекрывает, как кажется с математической точки зрения, и работу Эйнштейна, и работы Г. Минковского 1907—1908 гг., с которыми связывается введение в физику четырехмерного пространства-времени — так называемого пространства Минковского. Сторонники приоритета Пуанкаре в открытии четырехмерного пространства-времени, отводя Минковскому лишь большую категоричность и пафос по сравнению с Пуанкаре, обосновывают свою точку зрения, например, такими словами из статьи Пуанкаре 1906 г.: преобразования Лоренца «являются линейными подстановками, не изменяющими квадратичной формы $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$... Будем рассматривать x , y , z , $t\sqrt{-1}$... как координаты... в пространстве четырех измерений. Легко видеть, что преобразование Лоренца представляет не что иное, как поворот в этом пространстве вокруг начала координат, рассматриваемого неподвижным» [23].

Казалось бы, комментарии излишни. Однако вернемся к работе Пуанкаре 1912 г. «Гипотеза квантов», не рассматривавшей вовсе вопросы теории относительности. Утверждение о дискретности множества возможных состояний любой изолированной физической системы, как указывает Пуанкаре, применимо и к Вселенной: «Следовательно, Вселенная должна скачком переходить из одного состояния в другое, но в промежутках между скачками она остается неизменной, и различные моменты, в течение которых она сохраняет свое состояние, нельзя было бы уже отличить друг от друга; мы приходим, таким образом, к прерывному течению времени, к атомам времени». Этими словами заканчивается параграф, и Пуанкаре переходит к другим вопросам.

Обратим внимание на вывод о прерывности времени, об атомах времени. Но почему только времени? Трудно представить, чтобы последовательный релятивист, действительно уверенный в том, что «пространство и время не являются двумя совершенно различными сущностями, которые могут быть представлены отдельно, но двумя частями одного и того же целого» [24], мог сказать что-либо новое о времени, не перенося это новое в какой-либо форме (хотя бы в форме вопроса) на пространство. Пуанкаре не ставит вопрос о дискретности пространства и, тем самым лишает нас возможности узнать в прямой форме, считал ли он действительно невозможным говорить о трехмерности пространства, отвлекаясь от его непрерывности. Но зато мы можем убедиться в том, что позицию Пуанкаре нельзя считать вполне релятивистской.

По словам Пуанкаре, «физика не может обойтись без математики, которая представляет ей единственный язык, на котором она может говорить». Однако рассмотренный пример подтверждает в данном конкретном случае (тривиальную в общей форме) принципиальную важность таких компонент физической теории, как физический смысл и физическое значение, отличающихся от математических смысла и значения. Отличие состоит в том, что понятия физической теории имеют определенный эмпирический статус и тем самым имеют возможность изменяться при уточнении смысла этого статуса; все это, конечно, не требуется для математической модели. Только взгляд на историю физики с позиций развитой теории, когда компонента физического смысла этой теории становится в известной степени тривиальной или по крайней мере привычной, может привести к отождествлению физической теории и ее математического аппарата.

Глава II

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И 3+1-МЕРНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Понятие размерности пространства и общая теория относительности

В современной науке наиболее глубокую физическую теорию пространства и времени дает общая теория относительности, созданная Альбертом Эйнштейном (1879–1955). Поскольку размерность — одно из наиболее фундаментальных свойств пространства-времени, то невозможно всерьез рассматривать проблему размерности вне ее связи с общей теорией относительности.

Термин «пространство-время», появившийся в предыдущем абзаце, и выражение «3+1-мерность пространства-времени», участвующее в названии этой главы, требуют специального пояснения, поскольку с ними связано существо теории относительности.

Несколько упрощая ситуацию, можно сказать, что пространство и время в дорелятивистской физике отождествлялись (иногда неосознанно) с трех- и одномерными евклидовыми пространствами E^3 и E^1 , и только к концу дорелятивистской эпохи внутри физики возникла (в связи с открытием неевклидовых геометрий) потребность обоснования таких представлений. Пространство и время, как считалось, имеют абсолютный смысл по отдельности, т. е. считалось, что для любых наблюдателей-экспериментаторов расстояние между данными двумя точками имеет одну и ту же величину и промежуток времени между двумя событиями имеет одну и ту же величину. В пространстве, поскольку оно отождествлялось с E^3 , расстояние Δr_s между точками p и p' выражается формулой

$$(\Delta r_s)^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2, \quad (1)$$

где $\Delta x_i = x_i(p') - x_i(p)$ — это разность декартовых координат точек p' и p . Время, понимаемое как E^1 , также можно было бы характеризовать некоей «метрикой» Δr_t :

$$(\Delta r_t)^2 = (\Delta t)^2, \quad (2)$$

где $\Delta t = t(q') - t(q)$ — это время, прошедшее от события q до события q' . Формула (2) выглядит, конечно, очень

искусственно и будет оправдана только дальнейшим изложением.

Уже в классической физике описание любого физического явления, физического процесса должно было включить в себя и пространственные и временные характеристики. Поэтому понятие «событие», как идеализация физического явления, происходящего в очень малой области пространства и длящегося очень малый промежуток времени (вспышка света), было бы вполне естественным и до теории относительности. Но в дорелятивистской физике можно было обойтись и без понятия «событие», поскольку оно расщеплялось однозначным и абсолютным образом на понятия «положение в пространстве» и «момент времени».

Пространство и время в нерелятивистской физике вполне можно было объединить формально в 4-мерное пространство E^4 . Это не раз подчеркивал Эйнштейн, указывая, что 4-мерность не связана именно с теорией относительности: «Каково отношение специальной теории относительности к проблеме пространства? В первую очередь мы должны предостеречь от того мнения, что четырехмерность реальности была введена впервые этой теорией. Даже в классической механике «положение» события определяется четырьмя числами: тремя пространственными координатами и одной временной координатой; таким образом, вся совокупность физических «событий» мыслится как бы погруженной в четырехмерное непрерывное многообразие...» [1]. Действительно, пространство E^3 с метрикой (1) и время E^1 с метрикой (2) можно было объединить в некое пространственно-временное многообразие, имеющее структуру E^4 с метрикой

$$(\Delta\rho)^2 = (\Delta\rho_s)^2 + \alpha^2 (\Delta\rho_t)^2 = \sum_{i=1}^3 (\Delta x_i)^2 + \alpha^2 (\Delta t)^2, \quad (3)$$

где α — некоторый параметр, как легко видеть, с размерностью скорости. Такое объединение, хотя и не имело оснований в физике, было формально возможным. Должен был, правда, возникнуть вопрос о смысле α , но во всяком случае топологии, порождаемые метрикой (3) с различными α , эквивалентны.

Однако в действительности понятие «пространство-время» появилось совсем не так. К началу XX в. в результате ряда экспериментальных и теоретических работ

выяснилось, что известный из классической механики закон сложения скоростей является лишь приближенным и отклонение от этого закона тем больше, чем ближе величины скоростей к скорости света c . В физику пришло представление о существовании фундаментальной постоянной с размерностью скорости c , которую можно было бы попытаться использовать вместо α в (3) для метрического объединения пространства и времени. Однако при этом одновременно обнаружилось, что величинам (1) и (2) нельзя придавать абсолютного значения; например, результаты измерения расстояния между концами некоторого стержня или измерения промежутка времени между вспышками некоторой лампы зависят от скорости наблюдателя относительно стержня и лампы. И, как оказалось, все эти (и другие) изменения в физике можно свести к инвариантности новой фундаментальной величины — *интервала* между двумя событиями P и P' :

$$[\Delta s(P, P')]^2 = (\Delta \rho_s)^2 - c^2 (\Delta t)^2 = \sum_{i=1}^2 (\Delta x_i)^2 - (\Delta x_4)^2,$$

$$\Delta x_4 = c\Delta t, \quad (4)$$

где $\Delta x_i = x_i(P') - x_i(P)$, $\Delta t = t(P') - t(P)$ — разности декартовых координат и промежуток времени, разделяющие события P и P' . Инвариантность интервала означает, что любые наблюдатели, вычислившие на основе своих измерений величину (4) для одной и той же пары событий P и P' , получают одно и то же значение, хотя величины $\Delta \rho_s$ и Δt у них будут разными. Событие, или мировая точка, при этом характеризуется четырьмя числами (для каждого наблюдателя своими) — тремя пространственными координатами и моментом времени $P = (x_1, x_2, x_3, x_4 = ct)$. Величина (4) отличается от (3) только знаком минус перед $c^2 \Delta t^2$. Но в этом «только» заключены и новая физика теории относительности, и новое взаимоотношение между метрическими и топологическими свойствами, о котором будет говориться ниже.

Критически мыслящий читатель, который впервые знакомится с теорией относительности в геометрическом обличье и вообще знает об этой теории только понаслышке, вряд ли не почувствует все нарастающего недоверия по мере знакомства с геометрией, основанной на «рас-

стоянии» (4). Это недоверие читатель, возможно, перенесет и на саму теорию относительности. Автор не может не признать, что предыдущие несколько страниц почти не препятствуют возникновению такого недоверия. В книгах, предназначенных, как сейчас иногда говорят, для «пешеходов» и специально посвященных теории относительности, есть возможность, рассматривая конкретные физические эксперименты, убедительно показать степень обоснованности специальной теории относительности, показать, почему физики уверены в теории относительности не меньше, чем, скажем, в шарообразности Земли.

В этой книге мы можем только попытаться понять, почему теория относительности столь непонятна для «пешеходов» и почему, в частности, некоторые «пешеходы» до сих пор предпринимают отчаянные усилия опровергнуть эту теорию.

Для этого продолжим сравнение специальной теории относительности (СТО) с теорией шарообразности Земли (ТШЗ), которая когда-то вызывала не менее бурные споры, чем теория относительности в XX в. Непонятно человеку чаще всего бывает то, что незнакомо, что находится вне его жизненного опыта. Каждой из теорий — ТШЗ и СТО — соответствует некоторая характерная величина: ТШЗ — радиус Земли $R=6400$ км $\sim 6 \cdot 10^6$ м, СТО — скорость света $c=3 \cdot 10^8$ км/с $\sim 10^9$ км/ч.

Огромные по человеческим масштабам величины R , c и определяют непонятность ТШЗ и СТО. Физическими масштабами, характеризующими жизненный опыт «пешехода», можно считать скорость пешехода $v \sim 5$ км/ч и его «размер» $h \sim 2$ м. Можно сказать, что непонятность СТО ($c/v \sim 10^8$) больше непонятности ТШЗ ($R/h \sim 10^6$) в сто раз.

Почему же в наше время ТШЗ понятна всем и ни один «пешеход» не покушается на эту теорию? Дело в том, что сейчас жизненный опыт «пешехода» включает в себя кругосветные путешествия, прямые телевизионные репортажи из космоса и многое другое. Теория становится понятной данному человеку, если отношение характеризующего ее параметра T к величине H , соответствующей жизненному опыту человека, становится порядка единицы ($T/H \sim 1$) или меньше единицы. В период создания ТШЗ жизненный опыт очень немногих людей включал в себя расстояния, сравнимые с R . Это были астрономы, путешественники, географы, и этим людям ТШЗ была понятна.

Аналогичным образом сейчас жизненный опыт физиков включает в себя такие явления, как движение элементарных частиц в синхрофазотроне, проникающая способность мюонов, достигающих поверхности Земли, хотя по «правилам» (по ньютоновским правилам) они должны были бы распасться в верхних слоях атмосферы. Эти и многие другие явления, подчиняющиеся законам СТО, делают эту теорию вполне понятной физикам. Когда наступит такое время, что СТО станет понятной всем, сказать трудно. Возможно, она начнет находить всеобщее понимание тогда, когда станут обыденными межпланетные телефонные разговоры и ответы собеседника придется ждать по нескольку минут или даже часов. А пока можно относиться с большим доверием к физикам, чей опыт (в области физических явлений) гораздо больше опыта «пешехода».

Абзацы, предшествовавшие этому небольшому отступлению, конечно, не могут дать подлинного представления о таком грандиозном событии, как создание специальной теории относительности, в котором участвовали выдающиеся физики и математики Г. Лоренц, А. Пуанкаре, А. Эйнштейн и Г. Минковский [2].

В частности, та геометрическая четырехмерная точка зрения, которая наиболее удобна для наших целей (и без которой невозможно представить создание общей теории относительности), возникла в основном в работах Минковского. Математическая модель пространства-времени в специальной теории относительности называется пространством-временем Минковского и обозначается M^{3+1} . Как уже ясно из предыдущего, M^{3+1} — это совокупность всевозможных четверок чисел (x_1, x_2, x_3, x_4) , называемых событиями, или мировыми точками, и для любой пары мировых точек задано по формуле (4) число, называемое интервалом между этими точками.

В классической физике и в СТО есть возможность определять размерность пространства и пространства-времени и без помощи топологии. Таких способов (эквивалентных) известно даже несколько. Построение декартовой системы координат в классической физике и инерциальной декартовой системы координат в СТО являются вполне определенными и выполнимыми задачами. Поэтому размерностью можно назвать просто количество *таких* координат, необходимое и достаточное для задания положения точки в пространстве или события в простран-

стве-времени СТО. Это по существу то же самое, о чем говорили еще Галилей и Лейбниц, когда они определяли размерность как максимальное число взаимно перпендикулярных прямых, проходящих через одну точку пространства. Кант, как мы помним, совершенно справедливо усомнился, что такое определение может объяснить, почему размерность *должна* быть равна трем, но *узнать*, чему равна размерность, с помощью такого определения можно.

Другой способ говорить о размерности, минуя топологию, связан с понятием вектора. В СТО, как и в классической физике, можно говорить о векторах, соединяющих одну точку пространства (или пространства-времени) с другой, можно говорить о сложении векторов и об умножении вектора на число, причем эти операции подчиняются всем обычным правилам векторной алгебры. Тогда размерностью можно назвать максимальное число независимых векторов, т. е. векторов, ни один из которых нельзя представить как сумму остальных векторов с некоторыми коэффициентами.

Существование выделенного класса равноправных инерциальных систем отсчета является фундаментальным физическим фактом для СТО. Этот факт на геометрическом языке описывается тем, что выражение для интервала (4) в СТО имеет один и тот же вид независимо от величины разностей пространственно-временных координат (Δx , Δt) двух мировых точек и независимо от выбора начала координат. Таким же свойством обладает выражение для расстояния (1) в классической физике. Это обстоятельство давало возможность говорить о трехмерности пространства в классической механике и о 3+1-мерности пространства-времени в СТО, не используя вовсе топологических понятий. Сам вид формулы (1) говорит о трехмерности (три слагаемых), а формулы (4) — о 3+1-мерности (три знака плюс и один знак минус). Конечно, вид формул (1) и (4) связан с использованием декартовых координат. Можно использовать и другие (сферические, цилиндрические и т. д.), но поскольку структура пространства-времени считается заданной, не зависящей ни от чего, то в E^3 всегда можно перейти к декартовой системе координат, а в M^{3+1} — к декартовой инерциальной системе отсчета.

Всего десять лет отделяют создание общей теории относительности (ОТО) от статьи Эйнштейна 1905 г.,

с которой берет начало СТО как физическая теория. Однако для понятия размерности пространства эти десять лет припели бóльшие изменения, чем два с половиной столетия, отделяющие ньютоновскую механику от специальной теории относительности.

Здесь не будет рассказано, как Эйнштейн начал работать над построением теории тяготения, согласованной с СТО; как он увидел в равенстве гравитационной и инертной масс ключевой принцип эквивалентности; как Эйнштейн распознал геометрическую природу гравитационного поля и понял, что оно должно описываться не одной величиной — ньютоновским потенциалом ϕ , а десятью величинами g_{ik} , которые одновременно должны описывать и метрическую структуру пространства-времени [2]. Есть немало хороших книг, доступно излагающих основные идеи общей теории относительности.

Для нас же здесь существенно то, что в ОТО метрические свойства пространства-времени, как и в СТО, описываются интервалом, величина которого определяется разностями координат двух мировых точек:

$$(\Delta s)^2 \approx \sum_{i,k=1}^4 g_{ik}(x) \Delta x_i \Delta x_k = g_{11}(x) \Delta x_1 \Delta x_1 + g_{12}(x) \Delta x_1 \Delta x_2 + \dots + g_{44}(x) \Delta x_4 \Delta x_4. \quad (5)$$

Отличие от (4), т. е. от СТО, состоит, во-первых, в том, что формула (5) дает величину интервала между двумя мировыми точками с разностями координат Δx_i только приближенно (что показывает знак \approx), и тем точнее, чем ближе координаты этих точек друг к другу. Во-вторых, величина интервала определяется не только величинами Δx_i , но и коэффициентами $g_{ik}(x)$, зависящими от четырех координат мировой точки, вблизи которой рассматривается интервал (5). Величины g_{ik} симметричны по своим индексам, т. е. $g_{ik} = g_{ki}$, поэтому на самом деле имеется десять (а не $16 = 4 \times 4$) различных величин g_{ik} . Тот факт, что формула (5) становится точной только в случае бесконечно близких точек, записывается символически так:

$$(ds)^2 = \sum_{i,k=1}^4 g_{ik}(x) dx_i dx_k. \quad (6)$$

Величины $g_{ik}(x)$, описывающие метрические свойства пространства-времени (и гравитационное поле), определяют

ся с помощью полученных Эйнштейном уравнений

$$E(g_{ik}) = \frac{G}{c^2} T, \quad (7)$$

которые связывают величины g_{ik} и характеристики вещества T (G — ньютоновская гравитационная постоянная, c — скорость света).

Отвлечемся на минуту от основной сюжетной линии, чтобы рассказать об одном нововведении Эйнштейна. В геометрии многомерных пространств и вообще в тех областях математики, где приходится использовать много однотипных величин, очень часто встречаются выражения, подобные (5) и (6) и представляющие собой суммы одинаково устроенных слагаемых. Для записи таких сумм в математике издавна использовался знак \sum , под и над которым символически записывались условия суммирования. Если посмотреть на математические тексты, написанные до 1916 г., то от знаков \sum , иногда повторенных в одной формуле по нескольку раз, темнеет в глазах. Замечательные математики (всегда заботящиеся об удобстве обозначений) мирились с этим. Но вот физик Эйнштейн, осваивая новый для него и для физики вообще аппарат римановой геометрии, нашел остроумный выход. В первом же систематическом изложении ОТО он предложил выражения типа (6) записывать просто:

$$ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k, \quad (6')$$

при этом по индексам, повторяющимся в формуле дважды, подразумевается суммирование, а индексы пробегают все возможные значения, например, в формуле (6') $i, k=1, 2, 3, 4$. Это «правило Эйнштейна» очень быстро было принято не только физиками, но и математиками, даже работающими в областях, не связанных непосредственно с римановой геометрией. Облегчая восприятие и «производство» физико-математических конструкций, это правило, разделяя судьбу других выдающихся изобретений в области обозначений, быстро стало общепринятым и анонимным. Случаев, когда правило Эйнштейна оказывается неудобным, почти нет. Одно из очень немногих исключений составляет данная книга, поскольку в записи (6') в отличие от (6) не указывается явно, сколько значений принимают индексы i, k .

А теперь подумаем, как в общей теории относительности можно понимать размерность пространства. Про-

стой, казалось бы, ответ состоит в том, чтобы размерностью называть количество координат, используемых в математической модели пространства ОТО, т. е. количество значений индексов в (6). Однако каких координат? В ОТО в общем случае нет обычного понятия инерциальных систем отсчета, нельзя установить координаты так, чтобы выражение для интервала принимало стандартный, один и тот же вид, независимый от выбора начала координат, подобно (4). С этим связаны особенности математической модели пространства-времени в ОТО. Эта модель, называемая римановым многообразием и обозначаемая R^{3+1} , радикально отличается от предыдущих моделей E^3 и M^{3+1} . Дело в том, что в ОТО задается даже не модель пространства-времени сама по себе, а лишь принцип построения такой модели в зависимости от того, чем «заполнено» пространство-время. Поэтому геометрические свойства пространства-времени в ОТО в различных мировых точках различны. Скажем, сумма углов треугольника в одном месте может быть больше 2π , в другом — меньше и т. д. Это означает, что пространство-время в ОТО искривлено, причем характер искривления в данном месте зависит от происходящих здесь физических процессов. С другой стороны, кривизна пространства-времени влияет на происходящие процессы. По образному выражению известного физика Дж. Уилера: «Пространство говорит веществу, как двигаться, а вещество говорит пространству, как искривляться». Таким образом, символ R^{3+1} обозначает не что-то столь же определенно устроенное, как E^3 и M^{3+1} , а только принцип устройства.

Поскольку пространство-время в ОТО может быть искривлено произвольным образом, среди систем координат в общем случае нет преимущественных. Поэтому если связывать размерность с числом координат, то эта связь должна существовать в любой возможной системе координат. Но что такое «любая система координат»? В СТО и тем более в классической физике можно было указать физически вполне определенные способы установления системы координат с помощью твердых стержней, часов и лучей света. В ОТО, где допускаются «произвольные» системы координат, такой возможности нет.

Представления Эйнштейна о размерности пространства тесно связаны с введением координат, но его отношение к роли и смыслу координат значительно изменилось при переходе от СТО к ОТО.

Специальная теория относительности, можно сказать, начиналась с придания реального физического смысла временной координате (с выяснения бессмысленности понятия «абсолютной одновременности») и уточнения физического смысла пространственных координат с помощью указания вполне определенной процедуры измерения: «Указание отдельных координат связывается со вполне определенным экспериментом, относящимся к измерению положения твердых тел» [3].

В общей теории относительности окончательный успех, по мнению Эйнштейна, стал возможен только после отказа от придания координатам физического смысла и признания равноправности «произвольных» систем координат: «Постулат относительности в его наиболее общей форме, которая лишает пространственно-временные координаты физического смысла, приводит с железной необходимостью к вполне определенной теории тяготения, объясняющей движения перигелия Меркурия» [4]¹.

Уже одно это показывает, какой трудный путь пришлось пройти Эйнштейну: вначале успех пришел в результате уточнения конкретного физического смысла координат сопоставлением с определенной процедурой измерения, а через десять лет успех более общей теории оказался связанным с отказом от физического смысла координат и от сопоставления их с какой-либо процедурой измерения.

Вот как сам Эйнштейн писал про координаты в ОТО: «Для описания пространственно-временных областей конечной протяженности нужны произвольные координаты в четырехмерном многообразии, обеспечивающие не что иное, как однозначное обозначение каждой из точек пространства-времени четырьмя числами, и отвечающие непрерывности этого четырехмерного многообразия» [5], или: «Каждой точке континуума мы произвольно ставим в соответствие числа x_1, x_2, x_3, x_4 , которые называются «координатами». Соседние точки соответствуют соседним значениям координат» [6]. Таким образом, прежде чем вводить координаты, уже нужно знать «непрерывность» пространственно-временного многообразия, необходимо знать, какие точки являются соседними, т. е. знать топологическую структуру пространства-времени. По словам

¹ Отклонение движения Меркурия от предсказываемого ньютоновской теорией — первое и одно из важнейших подтверждений ОТО.

Эйнштейна, «координаты выражают только порядок или степень «близости», а следовательно, и размерность пространства» [7].

Поэтому в ОТО топологическое представление о размерности пространства впервые оказалось фактически неизбежным.

Метрические и топологические свойства пространства-времени. Представления Эйнштейна о размерности пространства

В специальной теории относительности метрические свойства пространства-времени описывались формулой (4), дающей величину интервала для *любой* пары мировых точек. В ОТО исходным элементом метрического описания становятся чисто локальные величины $g_{ik}(x)$, дающие величину интервала только для бесконечно близких мировых точек.

Однако если пространственно-временная модель как результат решения уравнения Эйнштейна (7) становится известной, т. е. известны величины $g_{ik}(x)$ для каждой мировой точки x , то можно и в ОТО ввести понятие интервала для конечно удаленных друг от друга точек P и P' . Для этого нужно рассмотреть кратчайшую, так называемую геодезическую линию, соединяющую точки P и P' . Понятие геодезической линии в R^{3+1} имеет важный физический смысл: движение материальной точки в ОТО происходит именно по геодезической. Для того чтобы получить величину интервала между точками P и P' , надо геодезическую, соединяющую их, разбить на маленькие участки для каждого участка вычислить интервал по формуле (5) и затем просуммировать.

Удобнее пользоваться не самим интервалом (который может быть и вещественным, и мнимым числом), а его квадратом — всегда вещественной величиной, которую мы будем обозначать $I(P, P')$ и называть для краткости тоже интервалом между мировыми точками P и P' . В простейшем случае пространства-времени Минковского, т. е. в СТО, как мы уже знаем,

$$I(P, P') = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 - (\Delta x_4)^2, \quad (8)$$

где $\Delta x_i = x_i(P') - x_i(P)$. Этот случай оказывается не только простейшим, но и одним из важнейших, поскольку произ-

вольно искривленное пространство-время R^{3+1} в малой окрестности любой точки устроено как плоское (не искривленное) пространство-время M^{3+1} .

Характерные особенности взаимоотношения метрических и топологических свойств проявляются уже в случае плоского пространства-времени. Мы еще более упростим картину, ограничившись случаем $1+1$ -мерного пространства-времени всего с одним пространственным измерением. Такое пространство-время можно уже представлять графически на двумерном листе бумаги. В этом случае интервал

$$I(P, P') = (\Delta x)^2 - (\Delta t)^2 \quad (9)$$

(единицы измерения длины и времени выберем так, что скорость света равна единице). Это двумерное пространство-время мы будем сравнивать с обычным двумерным евклидовым пространством E^2 , т. е. с геометрией плоскости, квадрат расстояния на которой дается формулой

$$K(P, P') = [r(P, P')]^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2. \quad (10)$$

Нагляднее представить, что такое величины $K(P, P')$ и $I(P, P')$ в общем случае искривленного пространства, можно было бы, считая, что между двумя точками P и P' на искривленной поверхности (скажем, на сфере) натягивается «веревка» так, что каждая ее точка прилегает к поверхности; минимальная длина «веревки» и даст искомую величину. Надо только помнить, что в случае интервала «веревка» — это пространственно-временная траектория движения точки.

Есть все основания говорить, что и функция $I(P, P')$ и функция $K(P, P')$ определяют метрическую структуру в некотором общем смысле, поскольку в обоих случаях каждой паре точек сопоставляется некоторое число. Однако между этими двумя типами метрических структур имеются качественные различия. Одно из них бросается в глаза сразу же: перед $(\Delta x)^2$ в (8) и перед $(\Delta t)^2$ в (9) стоит знак минус. Интервал $I(P, P')$ для разных пар точек P и P' может принимать и положительные, и отрицательные значения в отличие от метрики типа (10). Поэтому будем говорить: \pm метрика и $+$ метрика. Обычные интуитивные представления о расстоянии соответствуют именно $+$ метрике. Однако \pm метрика имеет то немаловажное преимущество, что в ней, как уже говорилось, заключены важнейшие физические закономерности теории относительности.

Можно показать, что из геометрии пространства-времени Минковского с интервалом (8) следует и релятивистский закон сложения скоростей, и изменение величин расстояния и промежутка времени для движущегося наблюдателя, и даже законы электромагнетизма — уравнения Максвелла. Но мы сосредоточимся на соотношении метрических и топологических свойств пространства-времени.

Эйнштейн говорил о «гауссовском» обобщении геометрии (это обобщение чаще называют «римановским») как достаточном для ОТО: «Гаусс предложил метод математического описания любого континуума, в котором определены метрические соотношения («расстояния» между соседними точками). Каждой точке континуума приписывается столько чисел (гауссовых координат), сколько измерений имеет континуум. Способ приписания выбрав таким, чтобы он был однозначным и чтобы соседним точкам соответствовали числа (гауссовы координаты), отличающиеся на бесконечно малую величину. Гауссова система координат является логическим обобщением декартовой. Она применима также и к неевклидовым континуумам, но лишь тогда, когда малые по отношению к определенному размеру («расстоянию») части рассматриваемого континуума тем более похожи на евклидов континуум, чем меньше рассматриваемая часть континуума» [8].

Однако Гаусс и Риман имели в виду, конечно, только \pm метрику, подобную метрике (10). Такая метрика естественным образом порождает топологическую структуру пространства: точка p примыкает к множеству M , если она находится на нулевом расстоянии от этого множества, т. е. если в M существуют точки, находящиеся на сколь угодно малом расстоянии от p . Вполне определенный смысл приобретают также слова «малые части континуума»: размер области пространства можно характеризовать наибольшим расстоянием между точками, принадлежащими этой области. Переход к \pm метрике пространства-времени в теории относительности принципиально меняет ситуацию. Теперь уже близость двух мировых точек нельзя связать непосредственно с величиной интервала между ними, поскольку равенство нулю интервала означает уже не совпадение точек, а лишь возможность связать эти два точечных события световым сигналом.

Различие между двумя типами метрик можно наглядно продемонстрировать на рисунке в двумерном случае. В случае \pm метрики (рис. 2, а) множество точек, удаленных

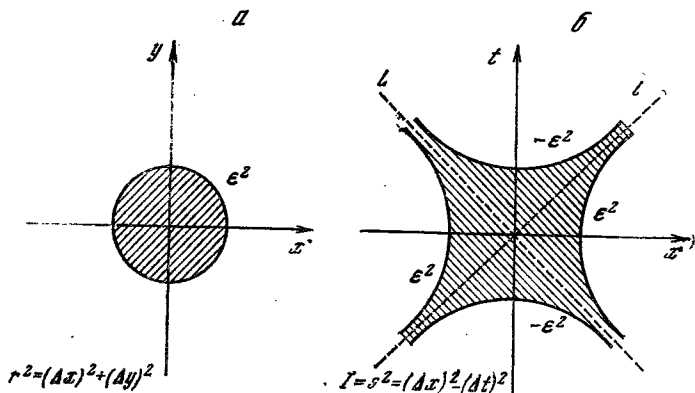


Рис. 2. Различие двух типов метрик

а — двумерная $+$ метрика $r^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ и множество точек, удаленных от 0 на расстояние, меньшее ε ; б — двумерная \pm метрика $I = s^2 = (\Delta x)^2 - (\Delta t)^2$ и множество точек, удаленных от 0 на интервал, меньший по модулю, чем ε (события, которые могут быть связаны с событием 0 световым сигналом, образуют линии l)

от точки O на расстояние ε , образует окружность, которая при уменьшении ε стягивается к точке O , т. е. ограничивает все более близкие к O точки. В случае же \pm метрики (рис. 2, б) множество точек, удаленных от точки O на один и тот же интервал, — это гипербола, при уменьшении ε все больше прижимающаяся к прямым l (образуемым мировыми точками, которые могут быть связаны с точкой O световыми сигналами). Это отличие и есть причина того, что \pm метрика не задает топологическую структуру так, как это делает $+$ метрика. Поэтому при математически строгом изложении общей теории относительности топологическая структура пространства-времени считается заданной до введения интервала, т. е. метрической структуры. Такую ситуацию трудно признать вполне удовлетворительной, поскольку к физике ближе скорее метрическая структура (которую можно свести к измерениям), чем топологическая. Но подобная логическая неудовлетворительность сама по себе, как показывает история физики, отнюдь не «смертельна» для физической теории.

Пожалуй, один из самых ярких примеров этого — абсолютное пространство и абсолютное время в механике Ньютона. Эти понятия отнюдь не мешали развитию физики на протяжении двух столетий, несмотря на то что уже Лейб-

ниц (современник Ньютона) критиковал недостатки этих понятий, и несмотря на то, что осознание этих недостатков стимулировало эйнштейновское революционное преобразование физических представлений о пространстве и времени. «Стимулировало», конечно, не значит «полностью определило». Возникновение специальной теории относительности обязано в первую очередь глубокому анализу законов электромагнетизма Максвелла и экспериментов, наиболее известным из которых был опыт Майкельсона. Для рождения общей теории относительности чрезвычайно важен был факт равенства гравитационной и инертной масс. Однако понимание логического несовершенства классических понятий абсолютного пространства и времени облегчило Эйнштейну критический пересмотр этих понятий.

Возвращаясь к топологической структуре пространства-времени в ОТО, следует отметить, что сам Эйнштейн подробно не обсуждал соотношение метрических и топологических свойств пространства-времени в теории относительности и, по-видимому, ограничивался интуитивным представлением о существующих в пространстве отношениях близости точек и т. п. Для этого, впрочем, была вполне понятная причина. Дело в том, что, хотя соотношение метрической структуры и топологии в ОТО довольно сложное, математический аппарат теории, описывающий с помощью уравнений Эйнштейна локальную искривленность пространства-времени, не зависит существенным образом от характера метрики, но, правда, предполагает, что в пространстве-времени уже заданы координаты. Вместе с тем, по Эйнштейну, единственное ограничение на введение координат — это согласованность координат с топологической структурой пространства-времени.

И все же нельзя сказать, что Эйнштейна не занимал вопрос о соотношении метрических и топологических свойств пространства-времени, о роли интервала в структуре теории. Уже само появление идеи геометризации гравитационного поля было неразрывно связано с представлением о фундаментальной роли интервала. В первой же работе, посвященной геометрическому подходу к гравитации (1913 г.), Эйнштейн исходил из того, что «интервал ds должен быть абсолютным инвариантом», который «следует понимать как инвариантную меру для расстояния между двумя соседними пространственно-временными точками. Поэтому интервал ds должен также иметь физический смысл независимо от выбранной системы отсчета».

Итак, « ds есть «естественно измеренное» расстояние между двумя пространственно-временными точками» [9].

С позиций уже развитой теории Эйнштейн также подчеркивал фундаментальное положение, которое занимает интервал в теории относительности, и указывал на важность предположения о том, что «существуют физические объекты, которые... измеряют инвариант ds » [10]. Наконец, в 1952 г. Эйнштейн писал, что «функции g_{ik} описывают не только поле, но и в то же самое время топологические и метрические структурные свойства многообразия» [11]. Были найдены и конкретные способы порождения топологической структуры пространства-времени его метрикой. Например, для так называемой A -топологии (называемой по имени открывшего ее известного советского математика А. Д. Александрова) необходима даже не вся метрическая структура, а только ее часть; достаточно по существу знать лишь то, для каких пар точек интервал равен нулю.

Но если в ОТО метрика (напомним, что речь идет о \pm метрике, т. е. об интервале) способна порождать топологическую структуру и тем самым, в частности, размерность пространства-времени, то нельзя ли говорить о размерности непосредственно на метрическом языке, минуя топологический уровень?

Оказывается, это тоже возможно. Для этого можно рассуждать, например, таким образом. Любое определение размерности должно «калиброваться» с помощью выбранного эталона n -мерности, т. е. должен выбираться некоторый математический объект, максимально просто и конструктивно заданный, размерность которого по разумным причинам считается равной n . Конструируемое общее определение размерности должно формулироваться в таких понятиях, которые были бы приложимы к этому эталонному объекту, и давать для него значение n . Именно так происходило дело при появлении топологических определений размерности, при этом в качестве эталона бралось n -мерное евклидово пространство E^n . С точки зрения физики в качестве такого эталона естественно взять пространство Минковского M^n .

Поскольку нам хотелось бы найти определение размерности, основанное только на понятии расстояния или интервала между двумя точками, то нужно опереться на какое-нибудь свойство E^n или M^n , которое выделяло бы число n только с помощью понятия метрики. Такое свойство не трудно указать. Рассмотрим для начала двумерный

случай. Если мы на плоскости E^2 (или в M^2) зафиксируем некоторую точку B , то указание расстояния до нее (или интервала) определяет положение бесконечного числа точек, образующих окружность с центром в точке B (или гиперболу в случае M^2). Если же мы зафиксируем две точки B_1 и B_2 , то указание сразу двух расстояний до этих опорных, базисных точек определит положение уже только конечного числа точек, не большего двух, поскольку две окружности могут пересечься не более чем в двух точках.

Нетрудно видеть, что подобным же свойством обладает и трехмерное пространство, если в качестве базисных выбрать три точки. Таким же свойством обладают и n -мерные пространства E^n и M^n . В каждом из них можно зафиксировать n базисных точек так, чтобы указание расстояний (или интервалов) до всех n точек базиса определяло положение любой точки пространства не более чем двузначным образом. При этом меньшее, чем n , число базисных точек, вообще говоря, недостаточно, а большее — избыточно. Это определение можно перенести и на случай искривленного пространства R^n , поскольку неискривленность пространств E^n и M^n нигде явно не использовалась.

Итак, в общем случае пространства-времени R^n размерность можно понимать как минимальное число мировых точек, таких, что величины интервалов до этих точек могут задать положение любого события. Это по существу реализует параметрическое представление о размерности (точки пространства параметризуются их расстояниями до опорных точек), только способ параметризации уже предполагается не произвольным, а основанным на метрической структуре самого пространства.

Ясно, что каждый базис из n точек порождает в R^n определенную систему координат: k -й координатой точки P является величина интервала между точкой P и k -й точкой базиса $x_k(P) = I(P, B_k)$. Если мы будем использовать только одинаково устроенные базисы, зафиксировав интервалы между точками самого базиса, то получим класс систем координат, соответствующий всевозможным таким базисам. Это класс систем координат во многих отношениях заменяет класс декартовых или инерциальных систем координат.

Таким образом, размерность пространства-времени может быть выражена в метрических понятиях.

Представление Эйнштейна о физическом пространстве-времени соответствует математическому понятию много-

образия. А размерность многообразия в некотором смысле тривиальным образом связана с размерностью евклидова пространства E^n ; многообразие «устроено» локально как E^n — у каждой точки многообразия есть окрестность, топологически эквивалентная E^n . Правда, даже размерность E^n стала тривиальной в топологическом смысле лишь в 1911 г. после доказательства Брауэром топологической неэквивалентности E^n с разными n .

Подход Эйнштейна к размерности можно описать так: существует эталон n -мерности — E^n и, устанавливая определенную связь с этим эталоном, можно говорить о размерности пространства как о «количестве координат». Это не самый общий мыслимый подход к размерности пространства, но нужно помнить, что даже в математике более общий подход по-настоящему был создан Урысоном и Менгером лишь в 1922—1923 гг., через семь лет после завершения ОТО и спустя несколько лет после ее экспериментального подтверждения.

Но более важно то, что создание релятивистской теории гравитации — общей теории относительности — и не требовало более общих математических моделей пространства, чем многообразие, и представлений о размерности иных, чем координатные. Даже последующее развитие физики не выдвинуло никаких альтернатив координатному описанию.

Для Эйнштейна утверждение о 4-мерности пространства-времени означает возможность установить между M^4 и пространством-временем однозначное и непрерывное соответствие.

Он считал 4-мерность фундаментальным свойством, неразрывно связанным с непрерывностью пространства, с тем, что пространство-время есть «континуум». Понятие «континуум» Эйнштейн поясняет следующим образом: «Я могу перейти от какой-либо точки поверхности к любой другой точке, переходя большое число раз к «соседним» точкам или, другими словами, переходя от точки к точке без «скачков». Читатель, по-видимому, достаточно ясно понимает (если только он не очень придирчив), что означает здесь понятие «соседний» и «скачки». Эту же мысль мы выражаем, утверждая, что поверхность представляет собой континуум» [12]. Но даже если быть не очень придирчивым, трудно счесть это описание точным. Не ясно, например, можно ли считать в этом смысле континуумом множество, состоящее из всех рациональных точек на прямой

Е'. Ведь и здесь можно переходить от точки к точке без скачков (вернее, сколь угодно малыми скачками). Таким образом, для Эйнштейна понятия «непрерывности» пространства, «континуума» не вызвали потребности глубоко их анализировать, хотя эти понятия не легче признать физически тривиальными, чем, например, понятие «абсолютной одновременности», столь важное для СТО.

Так же как и Пуанкаре, Эйнштейн связывал понятие размерности с непрерывностью. Возникшие в связи с рассмотрением квантовых явлений сомнения в необходимости непрерывности пространства-времени Эйнштейн встречает вопросом: «Каким образом следует сохранить наиболее существенные черты четырехмерности (хотя бы в некотором приближении), если отказаться от представлений о непрерывности?» [18].

Из этих слов можно понять фундаментальное значение для Эйнштейна факта 4-мерности, которую он связывал с непрерывностью потому, что «не мог придумать» другого понятия размерности.

Нет свидетельств, что Эйнштейн пытался осмыслить 4-мерность пространства-времени на конструктивном физическом уровне. И все же размерность для Эйнштейна — важнейшее физическое свойство материального мира. В предисловии к книге М. Джэммера «Концепции пространства» Эйнштейн рассматривает историю понятия пространства как развитие и взаимодействие двух существенно различных концепций: абсолютного пространства и «пространства как свойства материальных объектов». Он считает неизбежным и исторически оправданным как длительное царствование в физике первой концепции, так и победу второй. Эту победу над концепцией абсолютного пространства он связывает с введением понятия поля. Заканчивает Эйнштейн словами, имеющими прямое отношение к проблеме размерности пространства: «...вся физическая реальность может быть представлена в виде поля, компоненты которого зависят от четырех пространственно-временных параметров... Пространственный характер физической реальности обуславливается в этом случае четырехмерностью поля. В этом случае «пустого» пространства, т. е. пространства без поля, не существует» [14]. Эйнштейн здесь по существу выделяет четырехмерность как важнейшее свойство пространства-времени и пытается представить размерность как свойство физического поля.

В этой связи интересно рассмотреть отношение Эйн-

штейна к пятимерным теориям поля — первой попытке решить физические проблемы с помощью обобщения размерностной структуры пространства-времени.

Пятимерные теории и 3+1-мерность физического пространства-времени

«— Нет,— ответила Маргарита,— более всего меня поражает, где все это помещается. — Она повела рукой, подчеркивая этим необъятность зала.

Коровьев сладко ухмыльнулся, от чего тени шевельнулись в складках у его носа.

— Самое несложное из всего! — ответил он.— Тем, кто хорошо знаком с пятым измерением, ничего не стоит раздвинуть помещение до желательных пределов. Скажу вам более, уважаемая госпожа, до черт знает каких пределов»².

Такой разговор состоялся в обыкновенной московской квартире, которая смогла вместить многие тысячи гостей, приглашенных на очередной бал к Воланду.

Примерно то же самое, что было сделано с квартирой № 50, собирались сделать с ОТО физики, предлагавшие считать, что кроме четырех измерений физического пространства-времени существует еще пятое. Цели подобных работ были неодинаковы. Часть из них, начиная с первой работы Т. Калуцы 1921 г., намеревались «раздвинуть» ОТО просто «до желательных пределов» и единым геометризованным образом описать электромагнетизм и гравитацию. В этих работах пятое измерение должно было обеспечить появление в теории новых переменных, которые можно было бы связать с электромагнитным полем. Действительно, как мы уже знаем, геометрия риманова пространства описывается величиной

$$ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k.$$

Но если пространство-время предполагается 5-мерным, то индексы i, k должны принимать значения 1, 2, 3, 4, 5. Тем самым кроме десяти величин, уже имевшихся в ОТО ($g_{11}, g_{12}, \dots, g_{44}$), появляются новые величины g_{i5} . Электромагнитное поле, как известно, описывается вектор-потенциалом, имеющим четыре компонента. Однако в теории появилось не четыре, а пять новых величин ($g_{i5}, i=1, 2, \dots, 5$)

² Булгаков М. Мастер и Маргарита.— В кн.: Булгаков М. Романы. М., 1975, с. 666.

и пятую величину приходилось исключать специальным образом, что само по себе рассматривалось как слабое место теории.

Другие работы, начиная со статей О. Клейна 1926 г., были связаны с надеждой «раздвинуть до черт знает каких пределов» ОТО и описать с помощью пятимерной классической геометрии квантовые явления. Эта надежда основывалась на том, как писал П. Бергман, что «описание пятимерного мира при помощи четырехмерного формализма является неполным», а «из неопределенности „четырёхмерных“ законов можно получить принцип неопределенности и что квантовые явления в конце концов смогут быть объяснены теорией поля» [15].

Неопределенность, возникающую при четырехмерном описании пятимерного мира, можно пояснить следующим образом. Представим себе модернизированный вариант платоновской пещеры — кинозал, в котором места занимают «платоновские физики» (будем их называть π -физиками в благодарность Платону, подарившему человечеству замечательный образ) [16], но на освещенном экране не демонстрируется фильм, а перемещаются тени от шаров, движущихся в зале в лучах проектора. Допустим, что у наших π -физиков есть возможность наблюдать все события, происходящие в (трехмерном) зале, только по теням на (двумерном) экране. Таким образом, описывать происходящие события они могут только с помощью величин, характеризующих расположение и перемещение теней на экране. Предположим далее, что шары взаимодействуют друг с другом (в трехмерном зале) по законам упругого удара. Тогда в результате своих двумерных исследований π -физики неизбежно столкнутся с тем, что «одни и те же» (двумерные) условия приводят к существенно различным результатам: в одних случаях (двумерное) столкновение шаров ведет к изменению их движения, а в других случаях шары беспрепятственно проходят друг через друга. Неопределенность результата взаимодействия шаров π -физики могли бы описать с помощью вероятности, которая с трехмерной точки зрения определяется, конечно, отношением диаметра шаров к глубине зрительного зала — величине, не наблюдаемой для π -физиков. Подобного рода неопределенность, вероятностный характер законов можно было бы ожидать, если бы оказалось, что мир можно уподобить 5-мерному зрительному залу, а реальное пространство-время — 4-мерному экрану.

Пятимерные теории, как было принято считать еще недавно, не оставили какого-либо следа в современной физике. В последние годы, однако, такое мнение уже нельзя считать бесспорным. Интенсивное развитие единых теорий в физике элементарных частиц привело к неожиданному возрождению идей Калуцы—Клейна. Конечно, это возрождение происходит на совсем новом уровне: лишних измерений берется уже не одно, а несколько, вовсе не ставится цель получения квантовых законов на классической геометрической основе, но общая идея, что единой теории фундаментальных взаимодействий может быть тесно в четырехмерном мире, осталась. Каких-либо окончательных результатов в этом направлении пока не удалось получить, но А. Салам, лауреат первой Нобелевской премии за достижения в области единых теорий (1979), связывает с «чудом Калуцы—Клейна» надежду на построение единой теории фундаментальных взаимодействий [17].

Однако, во всяком случае для историка физики, пятимерные теории представляют чрезвычайно интересный объект. Начиная с работы Калуцы 1921 г., на протяжении нескольких десятилетий большие усилия физиков-теоретиков прилагались в этом направлении. Причиной было удавшееся Калуце естественное формальное включение электромагнетизма в геометрическую структуру пятимерного пространства, эквивалентное обычной максвелловской электродинамике в рамках ОТО, а также возможность развития теорий на фундаментальной, проверенной уже в ОТО основе римановой геометрии.

Переход к пятимерному пространству был не менее радикальным шагом, чем переход от пространства и времени нерелятивистской физики к пространству-времени СТО. Однако если последний был по существу навязан максвелловской теорией электромагнитного поля и, следовательно, всей совокупностью электромагнитных явлений, описываемых этой теорией, то даже сама идея единым образом описать гравитацию и электромагнетизм была вызвана, скорее, «эстетическими соображениями». Тем более это относится к конкретной «пятимерной» попытке построения такой теории. Уже тогда была ясна неоднозначность такой формы единой теории: и геометрия Вейля, и обобщение римановой геометрии с сохранением четырехмерности могли конкурировать с ней. Это совершенно не похоже на однозначность перехода к СТО.

Бергман писал: «Калуца ввел пятое измерение исключительно с целью увеличения числа компонент метрического тензора, не приписывая ему никакого реального смысла». Усилия теоретиков в дальнейшем были направлены на придание физического смысла пятому измерению. Уязвимым местом пятимерных теорий было условие, тем или иным образом «обезвреживающее» пятое измерение, делающее его ненаблюдаемым. Однако кроме нахождения корректной формы задания такого условия оставалась еще более важная проблема физического обоснования необходимости перехода к пятимерному пространству. И в первой, и в последней работах Эйнштейна по пятимерной теории ставится проблема: «Объяснить, почему континуум очевидным образом ограничен четырьмя измерениями» [18].

По-видимому, единственным, сколько-нибудь похожим на физическое обоснование было упомянутое замечание Бергмана о сходстве неполноты (и, следовательно, как можно было надеяться, вероятностного характера) описания пятимерного мира с помощью его четырехмерных проекций, с одной стороны, и квантового описания — с другой. Однако эта неполнота была проявлением конкретной формы одной общей идеи — так называемой идеи скрытых параметров. Сторонники гипотезы скрытых параметров стремились к классической интерпретации квантовой теории, предполагая, что физическая реальность управляется классическими законами, но характеризуется большим количеством динамических переменных, чем обычно считается (координаты, импульсы, напряженность электромагнитного поля). «Лишние» переменные (скрытые параметры) ненаблюдаемы сами по себе, и поэтому результаты физических экспериментов «размазываются» по всей области возможных значений скрытых параметров (по глубине кинозала в приведенном выше примере). Но для самой идеи скрытых параметров не было других оснований, кроме ностальгии, связанной с утратой привычного классического описания. В случае пятимерной теории не ясно было, почему надо ограничиться именно одним скрытым параметром, а не рассматривать $4+k$ -мерную ($k>1$) теорию. Против теории можно было выдвинуть, как и для всей концепции скрытых параметров, весьма общие (и веские) аргументы.

Именно отсутствие физического обоснования пятимерной геометрии привело, по-видимому, Эйнштейна к отказу от работы в этом направлении. Причем речь, конечно, не шла о полном равноправии пятого измерения. Это было

ясно уже с самого начала; и о пространстве-времени СТО следовало для точности говорить как о 3+1-мерном, а не 4-мерном. Важно было, конечно, отсутствие физических оснований для 3+1+1-мерной геометрии.

Можно было бы подумать, что решающей была неплотность пятимерного направления, тем более что нечто подобное сказано в начале статьи Эйнштейна 1944 г., где впервые заявлено об отказе от пятимерия (через три года после последней работы Эйнштейна, посвященной еще пятимерной теории). Однако это был, по-видимому, аргумент «для других». Скорее следует принять другое объяснение Эйнштейна, сводящееся к тому, что в пятимерной теории не удалось объяснить, почему континуум очевидным образом ограничен четырьмя измерениями. Действительно, ведь сама программа единой теории Эйнштейна была (после создания ОТО) не более плодотворной, однако он не отказался от этой программы, и с другой стороны, не принял явно плодотворную квантовую программу.

Вся в целом попытка построения пятимерной теории не может рассматриваться как «офизичивание» понятия размерности пространства, так как абсолютная четырехмерность заменялась на абсолютную пятимерность, но четырехмерность (в отличие от пятимерности) имеет совершенно отчетливые физические основания. Однако, как уже говорилось, не исключено, что идеям, лежащим в основе пятимерного подхода, еще предстоит сыграть свою роль в физике. Это подтвердило бы никем не доказанную и даже по-настоящему не сформулированную, но тем не менее широкоизвестную «теорему» о том, что всякая красивая математическая идея рано или поздно находит физическое применение.

Квантовая дискретность и четырехмерный пространственно-временной континуум

«Понятия, которые оказываются полезными... легко завоевывают у нас такой авторитет, что мы забываем об их земном происхождении и воспринимаем их как нечто неизменно данное. В этом случае их называют «логически необходимыми», «априорно данными» и т. д.... анализ давно используемых нами понятий и выявление обстоятельств, от которых зависит их обоснованность, пригод-

ность, и того, как они возникают из данных опыта, не является праздною забавой. Такой анализ позволяет подорвать излишне большой авторитет этих понятий. Они будут отброшены, если их не удастся узаконить должным образом, исправлены, если они не вполне точно соответствуют данным вещам, заменены другими, если необходимо создать какую-нибудь новую, в каких-то отношениях более предпочтительную систему». В этом высказывании Эйнштейна проявилась черта его методологии — скептицизм к установившимся представлениям, стремление к анализу их реального физического статуса. Значение эйнштейновской методологии для науки XX в. огромно. При создании теории относительности такая методологическая позиция оказалась решающей. (Хотя, конечно, именно возникновение СТО и ОТО как результат такой позиции сделало возможным ее усвоение, в частности, создателями квантовой механики, для которых эта позиция была еще более необходима.)

В отношении пространственных понятий наиболее ярко Эйнштейн выразил свою позицию следующим образом: «Что является априори несомненным, или необходимым, соответственно в геометрии (доктрина пространства) или в ее основаниях? Прежде мы думали — все, теперь мы думаем — ничто. Уже понятие «отрезок» является логически произвольным: вовсе не обязаны существовать вещи, соответствующие ему даже приближенно. Аналогичное замечание можно сделать о понятиях прямой, плоскости, о трехмерности пространства и о справедливости теоремы Пифагора. Даже доктрина континуума никоим образом не дана нам в природе человеческого мышления, так что с точки зрения теории познания чисто топологическим соотношениям нельзя придавать большего значения, чем другим соотношениям [19].

Известны и другие высказывания Эйнштейна, выражающие сомнения в абсолютной применимости обычных пространственных представлений, причем эти сомнения уже явно связаны с особенностями квантовых явлений: «Предложенная здесь физическая интерпретация геометрии не может быть непосредственно применена к областям пространства субмолекулярных размеров... Только успех может служить оправданием такой попытки приписать физическую реальность основным понятиям римановой геометрии вне области их физического определения. Однако может оказаться, что подобная экстраполяция имеет

не больше оснований, чем распространение понятия температуры на части тела молекулярных размеров» [20].

Однако для построения физической теории недостаточно одних лишь сомнений, и в связи с этим Эйнштейн пишет: «...введение пространственно-временного континуума может считаться противоестественным, если иметь в виду молекулярную структуру всего происходящего в микромире. Утверждают, что успех метода Гейзенберга может быть приведен к чисто алгебраическому методу описания природы, т. е. исключению из физики непрерывных функций. Но тогда нужно будет в принципе отказаться от пространственно-временного континуума. Можно думать, что человеческая изобретательность в конце концов найдет методы, которые позволят следовать этому пути. Но в настоящее время такая программа смахивает на попытку дышать в безвоздушном пространстве» [21].

В последних работах Эйнштейн уже более определенно признает победу квантовых представлений: «Можно убедительно доказать, что реальность вообще не может быть представлена непрерывным полем. Из квантовых явлений, по-видимому, следует, что конечная система с конечной энергией может полностью описываться конечным набором чисел (квантовых чисел). Это, кажется, нельзя совместить с теорией континуума и требует для описания реальности чисто алгебраической теории. Однако сейчас никто не знает, как найти основу для такой теории» [22].

Пожалуй наиболее ярко позиция Эйнштейна видна в ответе на статью известного математика К. Менгера, выразившего сомнения в окончательности представлений о физическом пространстве как о континууме. Эйнштейн пишет:

«Для построения современной теории относительности существенно следующее:

1. Физические объекты описываются непрерывными функциями — параметрами поля, зависящими от четырех координат. Если топологическая связность сохраняется, то выбор этих координат произволен.

2. Переменные поля являются компонентами тензора. Среди этих тензоров имеется симметрический тензор g_{ik} для описания гравитационного поля.

...Рассматривая квантовые явления, мы начинаем подозревать, что могут появиться сомнения в окончательной целесообразности программы, коротко характеризуемой

предположениями (1) и (2). Можно усомниться только в предположении (2) и, таким образом, поставить вопрос о том, нельзя ли адекватно сформулировать законы с помощью дифференциальных уравнений, не отбрасывая утверждения (1). Мне кажется (думаю, что мою точку зрения разделяет и д-р Менгер), что еще проще предпринять более радикальную попытку и отказаться от предположений (1) и (2). Пока нет новых понятий, обладающих достаточной созидательной силой, приходится довольствоваться одними лишь сомнениями. Таково, к сожалению, мое положение. Я придерживаюсь представлений о континууме не потому, что исхожу из некоторого предрассудка, а потому, что не могу придумать ничего такого, что могло бы органически заменить эти представления. *Каким образом следует сохранить наиболее существенные черты четырехмерности (хотя бы в некотором приближении), если отказаться от представлений о непрерывности?»* [23].

В этих словах не только выражена открытая, непредубежденная позиция Эйнштейна и фундаментальность для него факта 4-мерности. Выделенный курсивом вопрос ставит вполне определенную проблему перед математикой и теоретической физикой: научиться описывать дискретные структуры, которые тем не менее можно было бы называть четырехмерными в каком-то определенном смысле. (Отметим, что Менгер — один из создателей топологической теории размерности — не предлагал в своей статье какой-либо дискретной конструкции, в которой могла бы сохраниться четырехмерность.)

Для четырехмерности в физике есть (и, естественно, никогда не исчезнут) совершенно определенные основания, связанные с широким диапазоном физических явлений. В связи с этим возникает вопрос: можно ли построить такую математическую модель пространства-времени, в которой четырехмерность в этом диапазоне явлений (соответствующим образом выраженная) не предполагала бы обязательно заранее заданной локальную 4-мерную непрерывную структуру пространства-времени и для сколь угодно малых расстояний?

Возможность описания такой структуры пространства-времени была бы желательна уже потому, что структуру пространства-времени и, в частности, его размерность на достаточно малых расстояниях было бы предпочтительнее получать как результат конкретных физических исследований для достаточно больших энергий, а не просто как нео-

граниченную экстраполяцию. Однако подобные «логические» преимущества, как показывает история физики, недостаточны для изменения физической теории, особенно в таком фундаментальном вопросе, как размерность пространства. Практически более существенные основания для постановки самой проблемы и возможности ее решения обсуждаются в гл. 5. Наиболее важное основание состоит в том, что отказ от классической непрерывной модели пространства-времени считается неизбежным для будущего синтеза релятивистской квантовой теории и эйнштейновской теории гравитации.

Глава III

РАЗМЕРНОСТЬ — ФИЗИЧЕСКОЕ ПОНЯТИЕ, ТРЕХМЕРНОСТЬ — ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКТ

«Каким образом в фундаментальных законах физики проявляется то, что пространство имеет три измерения?»

Статья Пауля Эренфеста (1880—1933) с таким названием была напечатана в 1917 г. в «Трудах Амстердамской академии» [1]. Только после этой статьи появились действительные основания считать размерность пространства физическим понятием, а трехмерность — физическим фактом.

Начнем с краткого изложения самой работы.

Введение к статье состоит всего из нескольких фраз, в которых Эренфест подчеркивает необычность вопроса, вынесенного в заголовок, и уточняет его:

«„Почему у нашего пространства именно три измерения?“ или, другими словами, „Какие особенности отличают геометрию и физику в пространстве R_3 от геометрии и физики в пространствах R_n ?“ (символом R_n Эренфест обозначает евклидово пространство E^n . — Г. Г.). Будучи поставленными таким образом, эти вопросы, возможно, не имеют никакого смысла. Наверно, они подвержены оправданной критике. Ибо действительно ли пространство „существует“? Является ли оно трехмерным? И затем сам вопрос „почему“! Что имеется в виду под физикой в пространстве R_4 или в R_7 ?

Я не буду пытаться найти лучшую форму для этих вопросов. Возможно, другие преуспеют в указании некоторых более сингулярных свойств R_3 , и тогда станет ясным, каковы „правильные“ вопросы, для которых наши рассуждения являются подходящими ответами.

Последняя фраза говорит о том, что сам Эренфест не только не считал вопрос исчерпанным, но даже и не считал его вполне удовлетворительным образом поставленным. И действительно, с современной точки зрения вопрос: «Почему пространство имеет три измерения?» — может пониматься в двух существенно различных смыслах.

Во-первых, можно пытаться объяснять трехмерность пространства исходя из более глубоких свойств материального мира в рамках некоей фундаментальной теории; при этом речь должна идти о теории, несравнимой с существующими физическими теориями, поскольку в них трехмерность пространства берется в качестве исходного предположения, постулата. Этот путь, в высшей степени сомнительный на сегодняшний день, с точки зрения истории физики представляется вполне возможным. Действительно, ответом, например, на вопрос: «Почему электромагнитное излучение атомов характеризуется дискретными частотами?» — стало построение фундаментальной теории (квантовой механики), объяснившей, исходя из одних и тех же фундаментальных принципов, не только характер атомных спектров, но и множество других явлений.

Второй смысл, который можно вложить в вопрос: «Почему пространство имеет три измерения?» — уже не связан непосредственно с такими грандиозными замыслами. Вопрос можно уточнить так: «Почему физики уверены в том, что пространство имеет три измерения?» или «Какие основания определяют уверенность физиков в трехмерности пространства?» Этот вопрос может показаться тривиальным по отношению к миру макроскопических явлений, когда трехмерность воспринимается «непосредственно» органами чувств¹ (разве обязательно надо

¹ Кавычки у слова «непосредственно» должны напомнить о чуждом, непростом смысле этого понятия. «Непосредственное» рассматривание, например, ложки в стакане с водой приводит к выводу, что ложка сильно меняет форму при погружении в воду и т. д. Поэтому отличие макроскопического опыта от немикроскопического состоит, точнее говоря, в том, что макроскопический

быть физиком, чтобы быть уверенным в трехмерности пространства?). Но этот же вопрос теряет всякую тривиальность, если учесть, что диапазон явлений, изучаемых современной физикой, вышел далеко за пределы макроскопических масштабов и что изучение явлений, например, в физике элементарных частиц и в космологии возможно только косвенными методами. Поэтому вопрос о размерности пространства в этих областях представляет собой вполне оправданную и нетривиальную задачу. При этом не следует думать, что размерность пространства — это только одно из многих свойств, экстраполяция которых на существенно новые явления требует специального обоснования. Дело в том, что размерность — наиболее общее количественно выражаемое свойство пространства-времени; в настоящее время всякая физическая теория, претендующая на пространственно-временное описание реальности, берет значение размерности в качестве исходного постулата. (Некоторое время назад в физике элементарных частиц был популярен идеал теории, обходящийся без понятий пространства и времени, однако в настоящее время в связи с успехами теории калибровочных полей надежды связываются в основном с теоретико-полевым описанием [2], которое существенным образом предполагает пространственно-временную картину явлений.)

Вернемся теперь к работе Эренфеста, которая соответствует как раз второму смыслу вопроса о размерности пространства, и посмотрим, каким образом в его работе трехмерность была обоснована в диапазоне физических явлений от атомных до астрономических масштабов.

Эренфест рассматривает «физику» в n -мерном евклидовом пространстве E^n . При этом закон взаимодействия с точечным центром он выводит (аналогично трехмерному случаю) из дифференциального уравнения Пуассона в E^n для потенциала, определяющего это взаимодействие. Уравнение Пуассона эквивалентно закону Гаусса, утверждающему, что поток напряженности поля через произвольную замкнутую поверхность равен суммарному заряду (или массе в случае гравитации), находящемуся внутри этой поверхности. Как мы помним, Пуанкаре действовал совершенно иначе; он исходил из неизменно-

ческий физический опыт имеет несравнимо больший «объем», сливаясь с обыденным опытом человека.

оти закона взаимодействия в частном случае двух точечных частиц ($F \sim r^{-2}$). Эренфест же исходит из неизменности общего закона взаимодействия, из которого уже в качестве следствия можно получить закон взаимодействия не только двух точечных частиц, но и любой системы тел произвольной формы и распределения плотности.

Чтобы иметь возможность ставить замкнутые физические задачи, Эренфест также подчиняет движение ньютоновским законам динамики, точнее говоря, их естественному обобщению на случай E^n .

Исходя из таких законов взаимодействия и движения, Эренфест рассматривает, в частности, следующие конкретные следствия этих законов: замкнутость и устойчивость орбит в поле гравитирующего центра («планетная система»), боровский спектр атома водорода.

Оказалось, что:

только в пространстве E^3 возможно как устойчивое финитное (при этом всегда с замкнутыми траекториями), так и инфинитное движение; напомним, что финитным называется движение, которому соответствует изменение радиальной координаты r в конечных пределах $0 < r_1 < r < r_2$;

в пространстве E^2 возможно только финитное движение, а замкнуты лишь круговые траектории;

в пространстве E^n с $n > 3$ финитное движение соответствует лишь круговым траекториям и к тому же всегда неустойчиво, т. е. сколь угодно малое возмущение приводит либо к падению на центр, либо к удалению в бесконечность.

Действительно, в сферически-симметричном случае в E^n из уравнения Пуассона для потенциала или из закона Гаусса для напряженности следует выражение для потенциальной энергии (в обозначениях Эренфеста)

$$\begin{aligned} V_n(r) &= -\kappa \frac{Mm}{(n-2)r^{n-2}}, \quad n \geq 3, \\ V_2(r) &= \kappa Mm \ln r, \\ V_1(r) &= \kappa Mmr, \end{aligned} \quad (1)$$

где константы M и m — массы звезды и планеты (или заряды ядра и электрона), а κ — константа взаимодействия.

Этим выражениям для потенциальной энергии соответствует выражение для силы взаимодействия

$$F_n(r) = \kappa Mmr^{1-n}. \quad (2)$$

Уравнение движения (n -мерный второй закон Ньютона)
 $ma = F$ (3)

в случае центрального поля приводит к двум сохраняющимся величинам — энергии и моменту импульса. Нетрудно понять, что в центральном поле в E^n движение всегда плоское (двумерное). Действительно, плоскость, определяемая вектором скорости и радиус-вектором, соединяющим движущуюся точку с центром поля, не меняет свое положение, поскольку изменение скорости происходит только по радиусу, т. е. в этой же плоскости. Законы сохранения энергии и момента импульса в данном случае имеют вид:

$$m(v_r^2 + r^2\omega^2)/2 + V(r) = \varepsilon = \text{const}, \quad (4)$$

$$mr^2\omega = \Theta = \text{const};$$

здесь v_r и ω — радиальная и угловая скорости. Из (1) и (4) следует:

$$v_r = r^{-1}(Ar^2 + Br^{4-n} - C^2)^{1/2}, \quad n \geq 3; \quad (5)$$

$$v_r = r^{-1}(Ar^2 - br^2 \ln r - C^2)^{1/2}, \quad n = 2,$$

где $A = 2\varepsilon/m$; $B = 2\kappa M/(n-2)$; $b = 2\kappa M$; $C^2 = \Theta^2/m^2$.

Анализ уравнений (5), по существу сводящийся к анализу корней уравнения $Ar^2 + Br^{4-n} - C^2 = 0$, без особого труда приводит к указанным выше выводам (рис. 3).

Свойствами электрического поля, подчиняющегося уравнению Лапласа в E^n , определяются также особенности спектра «водорода» в этом пространстве. Этот спектр Дренфест получает с помощью квантования Бора.

Но вначале напомним кратко, что такое боровская модель атома.

Одним из наиболее загадочных фактов для классической физики было то, что атомы данного вещества излучают свет не любых длин волн, а вполне определенных, всегда одних и тех же. Скажем, натрий и вещества, содержащие его (например, обычная поваренная соль), при высокой температуре испускают излучение желтого цвета. Не зная объяснения этого факта, физики и химики тем не менее очень успешно и плодотворно использовали это свойство для распознавания, идентификации веществ (спектральный анализ). Около полувека физикам приходилось мириться с тем, что они не знали, чем определяются спектральные «паспорта» различных веществ.

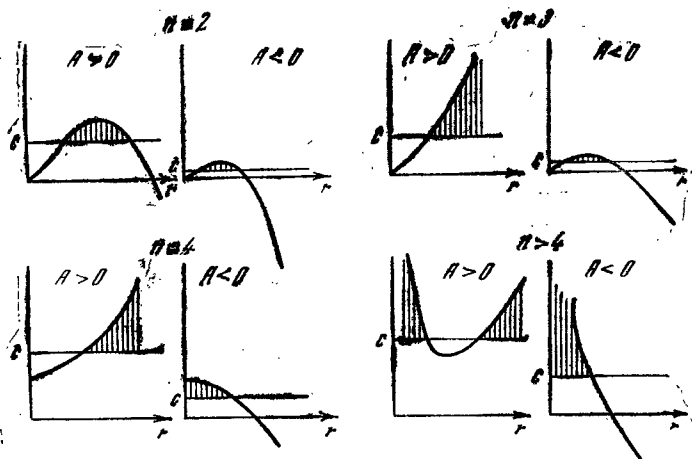


Рис. 3. Графики, с помощью которых Эренфест иллюстрировал характер движения точки в поле точечного центра в n -мерном пространстве. Кривые отвечают величине $Ar^2 + Br^{4-n}$ (или $Ar^2 - br^2 \ln r$ при $n = 2$), знак A совпадает со знаком энергии. Заштрихованные области соответствуют положительности подкоренных выражений, т. е. возможным значениям r .

А после знаменитых опытов Резерфорда, после появления в 1911 г. резерфордовской планетарной модели атома положение стало совсем нестерпимым. Ведь согласно классической теории электромагнитного поля электрон, вращающийся вокруг ядра, во-первых, может, и даже должен, излучать свет всех длин волн, и, во-вторых, электрон, постоянно излучая энергию, должен через очень маленькое время упасть на ядро.

Обе эти трудности были преодолены в предложенной Н. Бором в 1913 г. модели атома. Согласно этой модели движение электрона по орбите вокруг ядра определяется законами классической механики, но сами орбиты могут быть не любыми, а лишь такими, для которых выполняется условие

$$mvr = n\hbar / 2\pi = n\hbar,$$

где m и v — масса и скорость электрона; r — радиус орбиты (предполагаемой для простоты круговой); n — любое положительное целое число: $n = 1, 2, 3, \dots$; \hbar — постоянная, которую ввел в 1899 г. М. Планк (и с помощью которой он решил не менее серьезную трудность класси-

ческой теории — объяснение теплового электромагнитного излучения). Согласно модели Бора, находясь на одной и той же орбите, электрон не излучает, а переход с орбиты, на которой энергия электрона равна ϵ_k , на орбиту с энергией ϵ_n соответствует частоте излучения $\nu_{kn} = (\epsilon_k - \epsilon_n)/h$.

Аналогичным образом Эренфест получает спектр водорода в n -мерном пространстве E^n . При круговом движении электрона с зарядом $-e$ и массой m вокруг неподвижного протона с зарядом e второй закон Ньютона вместе с законом для силы, аналогичным (2), дают $mr^2\omega^2 = e^2/r^{n-1}$. Условие Бора для стационарных орбит имеет вид $mr^2\omega = k\hbar$, где k — целое число. Для орбиты с номером k энергии

$$\epsilon_k = \epsilon_1 k^{-2(n-2)/(4-n)}, \quad \epsilon_1 = C(n-4)/(n-2);$$

здесь $C = \text{const}$; размерность пространства $n > 2$.

Излучаемые частоты определяются из условия $\nu_{lk} = (\epsilon_l - \epsilon_k)/h$. При $n=4$ сингулярный («в особенности замечательный по отношению к теории квантов», как пишет Эренфест) случай $mr^2\omega = em^{1/2}$, т. е. момент импульса, может иметь только одно определенное значение и «коэффициент притяжения должен быть связан с \hbar , если квантовое условие (только при одном значении k) выполняется». Действительно, условие квантования приводит к жесткой связи $em^{1/2} = k\hbar$.

При $n > 4$ спектр $\nu_{lk} = \nu_0(l^\alpha - k^\alpha)$, $r_k = k^{2/(4-n)}$, где $\alpha = 2(n-2)/(n-4) > 0$, т. е. получаются «серии в спектре, которые при постоянном k содержат линии в ультрафиолете, все более и более далекие друг от друга». Но более важно может быть то, что при $n > 4$ электрон должен переходить на все более далекие орбиты, соответствующие меньшей энергии, т. е. атом самопроизвольно ионизируется (если считать, что k может быть равно и нулю).

Эренфест не рассматривает случай $n=2$, когда энергетический спектр $\epsilon_l - \epsilon_k = e^2 \ln(l/k)$ (не зависящий от \hbar) полностью дискретен, т. е. атом вообще не может быть ионизирован.

Результаты анализа свойств n -мерного «атома» позволяют сделать вывод, что трехмерность пространства в атомных явлениях вполне обоснована, поскольку отличие от трехмерности привело бы, как показал Эренфест, к радикальному отличию спектра от наблюдаемого. Однако важно подчеркнуть, что если бы обнаружилось, что спектр атома точнее согласуется с наблюдаемым при раз-

мерности, не равной трем, то это дало бы основание предположить другую размерность пространства в атомных масштабах.

Квантовомеханическое решение задачи о спектре n -мерного атома [3] (на основе уравнения Шредингера), хотя и отличается существенно (при $n \neq 3$) от результатов боровского квантования, использованного Эренфестом, также приводит к «сверхнестабильности» атома при $n \geq 4$ (электрон самопроизвольно должен падать на ядро) и к «сверхстабильности» атома при $n \leq 2$.

Кроме свойств планетной системы и атома водорода в E^n Эренфест рассматривает также свойства волнового процесса и некоторые геометрические свойства пространства E^n . В результате он приходит к выводу о качественном отличии случая $n=3$ от других значений размерности [4].

Через два с небольшим года после статьи 1917 г. Эренфест направляет в журнал «Аннален дер физик» несколько измененный вариант этой статьи [5]. В качестве повода для этой публикации он упоминает замечание Г. Вейля о четырехмерности пространства-времени. Вейль в связи со своим вариантом единой теории поля, в которой вектор-потенциал электромагнитного поля получил геометрическую интерпретацию, указал на выделенность четырехмерности пространства-времени, связанную с тем, что только в четырехмерном мире уравнения для электромагнитного поля обладают особым свойством конформной инвариантности, которая в теории Вейля заменяла обычную ковариантность ОТО, т. е. независимость вида основных уравнений от преобразования координат.

В заключительных замечаниях к статье 1920 г. Эренфест подчеркивает, что размерность пространства проявляется практически во всей физике.

Что такое физика в n -мерном пространстве?

Что же на самом деле сделал Эренфест? Он глазами физика посмотрел на совокупность пространств E^n , отличающихся одним параметром — размерностью. Конечно, эта совокупность не исчерпывала даже в то время все возможные геометрические структуры, с большим или меньшим правом носящие название «пространство» и претендующие на роль математических моделей,

описывающих свойства реального физического пространства. Достаточно указать на римановы пространства, не говоря уж об общих метрических и топологических пространствах. Однако совокупность $\{E^n\}$ выгодно выделялась тем, что для каждого пространства из этой совокупности можно было естественным образом предложить совершенно определенную «физику», по крайней мере ее фундаментальную часть. Действительно, уравнения, служащие для записи основных физических законов, легко допускают обобщение с E^3 на E^n . Для этого достаточно в соответствующих суммах число слагаемых заменить с 3 на n (например, в выражении для радиус-вектора и т. д.). Форму же фундаментальных уравнений естественно оставить прежней: уравнение Пуассона (закон Гаусса), волновое уравнение, законы Ньютона, квантовый постулат Бора, уравнение Шредингера и т. д.

Фундаментальные физические законы взаимодействий сейчас задаются обычно в так называемой вариационной форме. При этом оказывается достаточным указать одну функцию от величин, характеризующих данное поле (эта функция называется лагранжианом), чтобы получить все уравнения, описывающие законы данного поля. Например, лагранжиан для простейшего случая скалярного безмассового поля $\varphi(t, x^1, x^2, \dots, x^n)$ имеет вид

$$L = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 - \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^k}\right)^2, \quad (7)$$

или в более краткой записи

$$L = \varphi_k \varphi^k.$$

Этот лагранжиан приводит к уравнению Пуассона и, следовательно, к полю точечного центра $\varphi \sim r^{2-n}$ ($\varphi \sim \ln r$ при $n=2$), т. е. к выражениям (1). Размерность пространства учитывается в выражении (7) только в виде условия на множество значений, которые может принимать индекс k . В 3+1-мерном случае $k=0, 1, 2, 3$. Таким образом, вышеприведенное выражение для лагранжиана (7) позволяет получить соответствующую часть физики (физику скалярного безмассового поля) в пространстве любой размерности, точнее говоря, в евклидовом и в римановом пространствах любой размерности.

По существу так и поступил Эренфест, беря за основу физики уравнение Пуассона, математически эквивалентное указанному лагранжиану (с естественным обобщением на другие поля). В этом пункте на первый взгляд возможно возражение, что такая процедура — это простейшая экстраполяция, что с тем же успехом можно представить себе лагранжиан в виде, например,

$$\tilde{L}_N = (\varphi_k \varphi^k)^{N-3} \quad (7')$$

(N — размерность пространства-времени), также переходящий в обычный лагранжиан в случае 4-мерного пространства-времени.

В ответ на это следует заметить, что Эренфест не просто придумывал какую-то физику в каком-то пространстве — такая физика, действительно, могла бы быть совершенно произвольной. Он ставил проблему иначе, выясняя, на чем основана уверенность физиков в том, что реальное физическое пространство, действительно, трехмерно, т. е. что все множество известных физике явлений (в том числе явлений, далеко выходящих за пределы обыденного, макроскопического опыта, в котором трехмерность очевидна) наилучшим образом описывается с помощью модели пространства E^3 . А раз речь идет о совокупности известных явлений, возможность выбора лагранжиана, разумеется, сильно ограничена. Такими ограничениями являются, в частности, свойства физических явлений, не требующие для своей формулировки определенного значения размерности пространства. Так, например, известный в теории электромагнетизма принцип суперпозиции с необходимостью свидетельствует о линейности уравнений (и, стало быть, о квадратичности лагранжиана). А тот факт, что для задания движения системы достаточно знать только начальные положение и скорость (это относится не только к механике, но и к теории поля), говорит о том, что дифференциальные уравнения, описывающие данную систему, должны быть не выше, чем второго порядка (т. е. в лагранжиан должны входить производные не выше первого порядка). Эти ограничения приводят как раз к обычному лагранжиану (7).

Правда, по поводу этих ограничений можно было бы сказать, что они не могут быть полным и абсолютно строгим обоснованием вида лагранжиана, так как связаны с определенным диапазоном явлений, ограниченным,

в частности, по характерным пространственно-временным масштабам. Но ограниченность эмпирического базиса в данный момент — обычная ситуация для науки.

Важно, однако, то, что в эту обычную ситуацию с помощью работы Эренфеста оказалось вовлеченным фундаментальное понятие размерности пространства, до этого находившееся в состоянии априорности. В статье Эренфеста нет анализа теоретико-познавательного статуса понятия размерности пространства, нет никаких методологических замечаний об этом понятии. Однако если бы физик захотел ответить на вопрос, что физически означает трехмерность реального пространства, то он должен был бы начать с анализа, подобного эренфестовскому.

Совершенно очевидно отличие подходов Эренфеста и Пуанкаре к физическому пониманию размерности. У Пуанкаре — стремление реализовать свою конвенционалистскую установку, показать физическую равноправность пространств любой размерности и «только удобство» трехмерного пространства. В результате — поверхностный и физически несостоятельный анализ закона всемирного тяготения в предположении, что размерность пространства отлична от трех. Исходный и неизменный факт для Пуанкаре — обратная пропорциональность квадрату расстояния в законе тяготения, и переход к пространству другой размерности лишь заменяет выражение рассеяния между телами через координаты. Он не видит, что закон r^{-2} в E^n при $n \neq 3$ несовместим со всей остальной (даже только гравитационной) физикой: с принципом суперпозиции, с эквивалентностью поля сферического распределения масс и поля материальной точки с массой, равной полной массе распределения и находящейся в центре распределения, и т. д.

Пуанкаре не учитывал, что физика не может дополнить любую геометрию так, чтобы их комбинация правильно описывала реальный мир. Хотя его замечание о том, что на опыте проверяется только сумма «физика + геометрия», правильно и, следовательно, некоторый конвенциональный элемент всегда существует в физике, сравнение позиций и результатов Эренфеста и Пуанкаре очень наглядно демонстрирует, что полного конвенционализма на самом деле нет. Еще нагляднее это было бы видно, если бы Пуанкаре рассмотрел не 4-, а 2- или 1-мерное пространство как допустимую модель реальности. Какая физика в сумме с одномерной геометрией

была бы равна сумме обычной физики с трехмерной геометрией?

Анализ Эренфеста не основывается на такой предвзятой позиции. И если бы Эренфест обнаружил, что спектр водорода в пространстве другой размерности точнее согласуется с экспериментальными данными, чем трехмерный спектр, то это могло бы дать ему основание предположить другую размерность пространства в атомных масштабах. Конечно, такое предположение потребовало бы в первую очередь ответа на вопрос: как согласовать эту «другую» размерность с несомненной трехмерностью пространства в макроскопических масштабах? Исследование Эренфеста не затрагивает этот вопрос, что эквивалентно неявному предположению: и без конкретной реализации такого согласования имеет смысл рассмотреть определенные, внутренние, свойства физических систем (подобные спектру атома и устойчивости планетной системы) в предположении отличия размерности от трех. Но полная обоснованность подобного рода исследований предполагает точное представление о том, как трехмерный, естественно, наблюдатель мог бы получать информацию о физических явлениях, характеризующихся размерностью пространства, отличной от трех.

Историческое значение работы Эренфеста состоит в том, что, поставив вопрос о смысле трехмерности и соотнеся ее с конкретными физическими явлениями, Эренфест тем самым установил границы, в которых трехмерность имеет реальное физическое обоснование и вне которых она оказывалась всего лишь предположением. В анализе Эренфеста эти границы сверху определялись масштабами Солнечной системы, а снизу — атомными масштабами. Вне этих границ вопрос оставался открытым. Таким образом, размерность пространства благодаря работе Эренфеста стала физическим понятием.

Вместе с тем следует отметить, что работа Эренфеста безусловно опередила свое время — до сих пор в физике практически не ощущается жесткость рамок абсолютной трехмерности. Однако если перед физикой действительно встанет вопрос об эмпирическом статусе факта трехмерности пространства, тогда необходимо будет вспомнить, что впервые путь к установлению такого эмпирического статуса, путь к расшифровке, переводу понятия трехмерности пространства на язык физики увидел Эренфест.

Анализ Эренфеста был распространен в дальнейшем, во-первых, на риманову геометрию (движение «планеты» в n -мерном обобщении ОТО) [7], и, во-вторых, как уже говорилось, боровское квантование было заменено анализом n -мерного уравнения Шредингера.

Предпосылки работы Эренфеста

Статье Эренфеста о трехмерности пространства истории науки до сих пор не уделяли должного внимания. И это не случайно. На первый взгляд кажется, что к работе 1917 г. можно отнести слова Эренфеста из его писем, адресованных А. Ф. Иоффе в 1913 г.: «...все, что я до сих пор сумел сделать, основывалось на любви к головоломкам, интересе ко всяким парадоксам, а не на стремлении сделать что-либо „значительное“; ...в отличие от тебя, Ритца, Эйнштейна и даже Дебая, у меня нет главных и солидных идейных направлений, нет „собственной проблемы“, а так, только „забавные задачки“...» [8]. В этих словах неоднократно выражавшаяся Эренфестом (и необоснованная) неудовлетворенность собой и недостаточной фундаментальностью своих исследований [9].

Однако работа 1917 г. все же не случайна; она не случайна как для общего состояния физики того времени, так и в индивидуальном творчестве Эренфеста.

Безусловно, работа Эренфеста по самой постановке проблемы значительно опередила свое время. Однако не следует думать, что эта работа была изолирована от современного ей состояния физики.

Одной из важнейших черт развития физико-математических наук к началу XX в. стало разрушение господствовавших представлений о евклидовом трехмерном пространстве как единственно возможном математическом описании свойств реального физического пространства. Проявлением этих прежних представлений была априоризация геометрических понятий и отождествление физического пространства с его математической моделью — евклидовым трехмерным пространством. Однако в связи с созданием неевклидовых геометрий вследствие работ Лобачевского, Бойяи, Гаусса и Римана математика XIX в. пришла к пониманию того, что евклидова геометрия — лишь одна из логически возможных геометрических систем. Это величайшее достижение математики становилось известно физикам в результате популяризации как самими

математиками, так и физиками, особенно чувствительными к проблеме эмпирического обоснования понятийного аппарата физики [10].

Такая атмосфера, ощущение необходимости выбрать и физически обосновать геометрическое описание, несомненно, облегчили путь Эйнштейна к созданию специальной и в особенности общей теории относительности, хотя, конечно, создание этих теорий было бы совершенно невыносимо без собственно физических причин. Одним из исходных пунктов для Эйнштейна стал как раз анализ эмпирического, физического статуса ньютоновских пространственных и временных понятий.

В свою очередь, революционные изменения в представлениях о пространстве и времени, связанные с теорией относительности, уже через небольшое время после того, как была разрушена «первая линия обороны» классических представлений, привели к чрезвычайно большой готовности физиков к новым, еще более глубоким изменениям пространственно-временных представлений. Достаточно вспомнить тогдашнюю необычайную активность в этом направлении: теория Вейля, геометрически объединяющая гравитацию и электромагнетизм; пятимерная теория; поиски других геометризованных единых теорий поля. Несколько позже такое умонастроение проявилось, например, в предположениях, что проблему ядра можно решить только радикальными изменениями геометрии (дискретное пространство) [11], что построить релятивистскую квантовую теорию поля нельзя без радикальных изменений понятия пространства-времени [12].

В этом геометрическом «брожении умов» не осталась незатронутой и размерность пространства. Уже говорилось о пятимерном направлении. Можно отметить также любопытное замечание Планка в его ответе на вступительную академическую речь Эйнштейна в 1914 г.: «Мы больше всего видим в этом обстоятельстве (вторая степень в законе всемирного тяготения $F \sim 1/r^2$. — Г. Г.) естественное следствие 3-мерности нашего пространства, которую мы принимаем, как факт и, будучи разумными физиками, не беспокоимся уже о том, почему пространство не обладает четырьмя или еще большим количеством измерений» [13]. Можно не согласиться с Планком, что всякий разумный физик должен воспринимать трехмерность как факт, не пытаясь проанализировать, какие основания заставляют физиков считать пространство трехмерным и

не существует ли границ у области обоснованности этого утверждения. Однако интересно, что вопрос о размерности пространства оказался небезразличен даже Планку, в общем-то не склонному к радикальным изменениям физической картины мира.

Таким образом, направленность работы Эренфеста можно считать в известном смысле характерной для физики того времени.

Работа Эренфеста была не случайна и в его собственном творчестве. Она вполне соответствовала его вкусам и устремлениям в теоретической физике. Кроме того, в научной биографии Эренфеста можно найти такие эпизоды, которые делают более понятным его обращение к вопросу о размерности пространства.

Понятие размерности пространства еще более фундаментально, чем представления о метрической структуре пространства-времени. Действительно, основной результат теории относительности состоял в установлении именно метрической структуры; при этом факт $3+1$ -мерности пространства-времени принимался в качестве исходного, не подлежащего анализу. Фундаментальность поднятой Эренфестом проблемы вполне соответствовала его устремлениям, которые, однако, скорее можно обнаружить в его письмах, чем в немногословных, четких, лишенных чаще всего методологических замечаний работах, предназначенных для других. Впрочем, одно замечание такого рода все же можно указать, и оно оказывается связанным любопытным образом с проблемой размерности пространства.

В 1911 г. в реферате «Магнитон» Эренфест очень ясно выражает свой вкус, называя истинной физикой внесение порядка в хаос явлений с помощью фундаментальных, «освещающих» идей. В том же реферате Эренфест критически отзывался о встречающихся в курсах физики попытках дать полное определение физики как науки. Он высказал сомнение, что подобное определение вообще может быть полезным из-за непрерывного изменения области явлений, исследуемых физикой. В связи с этим с критикой выступил О. Д. Хвольсон (автор известного в то время курса физики, но не слишком известный как физик-исследователь) и, отдав должное самой статье («превосходная статья», «образец ясного и общедоступного изложения сложного современного вопроса»), раздраженно заметил, что определения физики, о которых говорит Эренфест, вообще никогда не существовали.

... Ответная статья Эренфеста «Возможно ли определить понятие «физика»? [14] уже целиком посвящена этому вопросу. Из этой статьи можно узнать, во-первых, что магнитные явления интересны Эренфесту, только поскольку они связаны с фундаментальными физическими закономерностями, а не в прикладном, инженерном аспекте. Во-вторых, Эренфест приводит несколько таких определений физики, о которых он говорил в предыдущей статье. Очень любопытно одно из них, взятое из «Физического словаря» иезуита А. Полиана (1761): «ФИЗИКА. Эта наука имеет предметом тело в его естественном состоянии, т. е. вещество длинное, широкое и глубокое. Рассматривать, может ли Всемогуший отнять у тела его длину, ширину и глубину, — значит желать остановить развитие физики. Мы верим, что Он это может; однако мы, как физики, воздержимся заниматься таким вопросом. Тело, лишенное своих трех измерений и сохранившее только требование протяженности, было бы скорее объектом метафизики, нежели физики» [15]. Как видим, в этом необычном определении трехмерность считается самым важным признаком реальности. Не эта ли категоричность, может быть подсознательно, привела к тому, что Эренфест задумался над вопросом о размерности пространства?

Но может быть кто-нибудь повлиял более реально на появление статьи о трехмерности пространства? Сам Эренфест ничего не пишет ни о причинах, которые побудили его заняться этим исследованием; ни о своих предшественниках или работах, идейно повлиявших на него. Работы, на которые ссылается Эренфест, не могли привести к самой постановке проблемы.

Истории науки известна только одна предшествующая работе Эренфеста попытка связать трехмерность пространства с физикой. Это — гипотеза Канта, о которой уже говорилось в вводной главе: «Трехмерность происходит, по-видимому, оттого, что субстанции в существующем мире действуют друг на друга таким образом, что сила действия обратно пропорциональна квадрату расстояния».

По-видимому, это предположение Канта никак прямо не подействовало на Эренфеста. Кроме того, что в работе Эренфеста нет указаний на такое влияние, следует отметить довольно безразличное отношение Эренфеста к классической философии вообще. В его переписке и статьях почти не встречаются имена философов или какие-либо ссылки на их работы. Исключение сделано, пожалуй, толь-

ко для Маха, однако он «не в счет», во-первых, потому, что он — современник Эренфеста (злободневная популярность) и, во-вторых, из-за его «физического» происхождения.

В то же время Мах «очень даже в счет». Дело в том, что в книгах Маха, которые внимательно читал Эренфест [16], в связи с критическим анализом основных физических представлений активно популяризировались достижения математиков в области неевклидовой и многомерной геометрии [17]. Вопрос о размерности пространства не был центральным в работах Маха, но все же у него появился, в частности, вопрос: «Почему пространство трехмерно?». Мах даже предполагал, что в атомной физике вполне возможно обращение к многомерным пространствам. Было бы, может быть, соблазнительным рассматривать работу Эренфеста как конкретный (отрицательный) ответ на это предположение, но прямых оснований для такой гипотезы нет. Следует отметить, что общая философская позиция Маха не вызывала сочувствия Эренфеста, писавшего как-то Иоффе: «Особенно заинтересовала меня критика идеалистической философии (которую, с моей точки зрения, олицетворяет Мах)» [18].

Не было ли какого-то более непосредственного повода для размышлений Эренфеста над вопросом о размерности пространства? Но как искать такой повод? Зарождение мысли, как правило, происходит не в официальной обстановке, и зачастую сам ученый не осознает полностью, что произошло. Только после того как он вынашивает, вырачивает эту мысль до жизнеспособного состояния, может появиться в качестве свидетельства о рождении соответствующая публикация. Ни в одной статье Эренфеста до 1917 г. нет никаких признаков его размышлений о размерности пространства. Поэтому приходится обратиться к письмам. Среди изданной переписки Эренфеста наибольший интерес представляет переписка Эренфеста с А. Ф. Иоффе, в первую очередь из-за ее объема и, во-вторых, из-за того, что Эренфест считал Иоффе одним из ближайших друзей. Однако в этой переписке был перерыв с 1914 по 1920 г. Без особой надежды на успех приступаешь к чтению писем до 1914 г., и захватывающе интересные, живые свидетельства той эпохи позволяют почти забыть о первоначальном конкретном вопросе. Но одна фраза в письме 1912 г. заставляет насторожиться.

Это письмо Эренфест написал 4 ноября 1912 г. Всего за несколько недель до этого он приехал в Голландию по приглашению Лоренца для того, чтобы занять его кафедру в Лейденском университете [19]. Первые недели Эренфеста в Голландии были заняты кроме устройства на новом месте официальными визитами и знакомствами с голландскими учеными. Среди других: «Пятница — визит с выражением благодарности Ван-дер-Ваальсу (попечитель университета!) — старенький человек (далеко за 70), и, кажется, более ничего. Потом Ваальс младший — около 40 — 45 лет. Гм...да. С ним помчался к *Бромверу*, приват-доценту математики в Амстердаме — сейчас единственному математику в Голландии, — совсем молод — воспитанник Геттингена — аксиоматика, теория функций, теория множеств. В общем это человек, с которым мне надо основательно познакомиться. Все, включая и Лоренца, говорят с особой весомостью о его выдающейся одаренности» [20].

Кто такой математик Бромвер, с которым Эренфесту захотелось «основательно познакомиться»? Подозрение усиливается, когда известный биобиблиографический справочник Поггендорфа сообщает, что математика с фамилией Бромвер в 1912 г. не существовало. Уж не Брауэр (*Brouwer*) ли это, с которым мы встречались в первой главе этой книги? Но Брауэр не был воспитанником Геттингена и вряд ли о нем, своим ровеснике, Эренфест мог бы сказать «совсем молод».

Приходится обратиться к издателям переписки Эренфест — Иоффе с просьбой еще раз взглянуть на оригинал написанного по-немецки письма, хранящегося в Ленинградском отделении Архива Академии наук СССР. Когда при любезном содействии издателей переписки удалось взглянуть на оригинал, все прояснилось. Почерк Эренфеста, действительно, дает возможность вместо *Brouwer* прочесть *Bromver*. Если, кроме того, уточнить перевод эренфестовского «телеграфного» стиля, то получим: «С ним помчался к *Брауэру*, приват-доценту математики в Амстердаме — сейчас единственному математику в Голландии, — довольно молод — геттингенец» и т. д. (у Брауэра, действительно, были активные связи с геттингенскими математиками).

На этом мы завершим отступление, возможно дающее читателю представление о том, какого рода обстоятельства сопровождают работу историка науки.

Итак, в письме Эренфеста речь идет о Л. Брауэре, одном из выдающихся математиков XX в., и, что для нас особенно важно, об одном из создателей топологии, авторе выдающихся работ, связанных с топологическим понятием размерности. Причем годами его наибольшей активности в этом направлении были как раз 1911—1913 гг.!

Брауэр находился под влиянием А. Пуанкаре. Это влияние проявлялось и в отношении к философии математики и, что особенно существенно, в связи с проблемой топологического определения размерности. В 1911 г. Брауэр доказал топологическую неэквивалентность E^n с разными n . В 1913 г. он воплотил в корректное математическое определение принадлежащую Пуанкаре идею индуктивного топологического определения размерности.

И вот как раз в период между этими двумя замечательными результатами Брауэра в топологической теории размерности с ним знакомится Эренфест. Можно предположить, что предметом их беседы была, в частности, занимавшая тогда Брауэра проблема размерности пространства. Это предположение еще более правдоподобно, если Эренфесту удалось осуществить намерение *основательно* познакомиться с Брауэром. А учитывая общительность Эренфеста, его жадность к новому, трудно сомневаться в реализации этого намерения.

Таким образом, импульс для размышлений Эренфеста над понятием размерности пространства мог прийти от топологии с помощью Л. Брауэра (и тем самым и А. Пуанкаре).

Но пять лет — не слишком ли большой интервал между начальным импульсом и публикацией работы? Ответом на этот вопрос может быть запись, которую Эренфест сделал в 1912 г. в записной книжке: «Всякий вопрос, на который ты натыкаешься при размышлении, или во время чтения, или, наконец, в разговоре, надо кратко и четко зафиксировать. Время от времени подобные вопросы следует просматривать, стараясь их как-то систематизировать. Прежде всего, приятно сознавать, что ты сумел разрешить некоторые из них, хотя первоначально едва лишь смог их сформулировать, — не говоря о том, чтобы разработать! Во-вторых, мы тем самым учимся не что туманное и неясное постепенно превращать в четко сформулированные вопросы. А это исключительно важно, это — полпути к решению: замечание столь же справедливое, сколь и тривиальное. В-третьих, попадая в круг высокообразованных

собеседников, ты располагаешь массой вопросов, уже четко тобой сформулированных и очерченных. Нет более прямого пути, чтобы раскрыть саму их — этих вопросов — сущность! Ничего нет более досадного, чем ощущение: вот бог представил мне возможность встретиться с выдающимся человеком, а я молча сидел перед ним, разинув рот. О скольких вещах я мог бы его спросить — но никаких конкретных вопросов у меня не было! Итак, для меня несомненно, что главное заключается в том, чтобы выработать у себя привычку туманные неясности перерабатывать в четкие вопросы» [21].

Зафиксированные в этой записи особенности методологии научного творчества Эренфеста делают вполне объяснимым пятилетний интервал. Столько времени могло понадобиться для эволюции от туманной неясности до четко поставленной проблемы.

Мера жесткости математической модели пространства-времени. Значение работ о физике размерности пространства

Утверждение о трехмерности пространства тривиально в том смысле, что уже Аристотель с помощью понятийного аппарата современной ему науки осознавал факт трехмерности пространства и выразил его соответствующим образом. А практически это фундаментальное свойство пространства было известно уже далеким предкам человека.

Тысячелетия, отделяющие двадцатый век от времени Аристотеля, отнюдь не сделали факт трехмерности менее известным и ясным. В этом смысле доказательство трехмерности пространства излишне. Однако следует отметить, что трехмерность очевидна для человека на основании его макроопыта, т. е. совокупности явлений, с которыми ему приходится сталкиваться в повседневной жизни.

Уже отмечалось, что работа Эренфеста значительно опередила свое время. Однако вместе с тем есть основание считать ее вполне своевременной. Действительно, начало XX в. отмечено появлением двух теорий, связанных с проникновением в области существенно немакроскопических явлений: квантовая теория — в микромир, теория относительности — в мегамир. Выход за пределы области изученных явлений, как правило, начинается с экстра-

поляции (самой грубой, линейной) известных закономерностей и свойств на новые явления. Эта экстраполяция, конечно, вполне естественна и даже неизбежна, однако сам факт такой экстраполяции чаще всего не осознается вначале. Это приводит к парадоксам, в результате решения которых возникают новые понятия и новое знание вообще. Хрестоматийный пример такой ситуации — экстраполяция законов классической электродинамики на движение электронов в атоме. В результате — парадокс неизлучения. Решение парадокса было достигнуто с помощью созданного понятийного аппарата квантовой механики и установления границ применимости классической электродинамики.

Смысл работы Эренфеста состоит в указании на необходимость перепроверять факт трехмерности пространства при расширении области исследуемых явлений на «нечеловеческие» масштабы. Атомные и астрономические явления выходят за пределы макроопыта, и результат исследования Эренфеста — подтверждение факта трехмерности пространства в этих явлениях. Могло бы оказаться, что предположение о другой размерности приводило бы только к количественным изменениям, и тогда пришлось бы сравнивать более тщательно различные случаи. Однако Эренфест установил, что различия в рассматриваемых случаях качественные, и это облегчило выбор между моделями пространства различных размерностей.

Речь по существу идет о мере жесткости математической модели пространства-времени, используемой в физике. Принятие модели трехмерного евклидова пространства ньютоновской физикой — результат макроопыта. Эта трехмерность практически без изменения перекочевала в 3+1-мерную псевдоевклидову модель пространства в СТО и квантовой теории и в 3+1-мерную псевдориманову модель в ОТО. Естественно возникает вопрос, не станет ли предположение о трехмерности (или вообще определенной размерности) при достаточном «удалении» от области макроскопических явлений слишком жестким для физики.

Отложив до главы 5 более подробное рассмотрение возможных ответов на этот вопрос в современной физике, отметим уже сейчас, что некоторые симптомы такой излишней жесткости, возможно, имеются. Разумеется, попытки сделать более гибкой пространственно-временную модель возникают «не от хорошей жизни», а от конкретных проблемных (или парадоксальных) ситуаций. При

этом не следует думать, что все эти проблемы возникли в последнее время. Одна из них была осознана еще в начале XX в. при сочетании классической электродинамики и СТО. Это проблема «собственной энергии электрона», или, на языке теории поля, проблема ультрафиолетовых расходимостей. Другие проблемы возникли совсем недавно в связи с описанием сильных взаимодействий при высоких энергиях, с «удержанием» кварков и т. п. Хотя по отношению к проблемам космологии (или физики в мегамасштабах) нет такого потока экспериментальных сведений, как в физике элементарных частиц, но и здесь главная проблема космологии — проблема начального состояния Вселенной (начала расширения, начальной сингулярности) — вызывает попытки усомниться в абсолютном характере свойства $3+1$ -мерности и реализовать эти сомнения в конкретных моделях.

Интересно сравнить отношение физиков к трехмерности как фундаментальному свойству пространства, проявляющемуся, как показал Эренфест, в фундаментальных физических законах, с отношением к законам сохранения — одному из наиболее эффективных инструментов теоретической физики. Размерность в некотором смысле фундаментальнее законов сохранения. В последних явно «заложена» определенная структура пространства-времени, в частности, его симметрии и размерность. Известно, что у физиков не раз возникали предположения о нарушении закона сохранения энергии-импульса (например, у Бора), не говоря о менее фундаментальных законах сохранения, нарушение которых (при определенных условиях) уже включено в теорию, например несохранение четности.

В отличие от этого 3-мерность пространства остается до сих пор по существу почти нетронутой.

В физике, правда, существует уже довольно давно направление, связываемое с идеями «дискретного пространства» и «фундаментальной длины» [22]. Это направление пытается найти такое пространственно-временное описание реальности, которое не предполагало бы заранее непрерывную структуру пространства-времени (точнее говоря, локальную структуру E^4). Это направление, вообще говоря, не эквивалентно отказу от абсолютного характера числа измерений как одного параметра, характерного для всех физических явлений, и включению понятия размерности пространства в совокупность физических понятий, физических величин с определенной областью примени-

мости, возможностью изменения. Обычно неявно предполагается, что моделью, альтернативной локально евклидовой $3+1$ -мерной модели пространства, является полностью дискретная, точечная, нульмерная, или, на более физическом языке, полностью квантованная модель пространства. Однако не исключено, что по мере углубления в микромир размерность пространства будет «отступать» постепенно и что для некоторых физических ситуаций приемлемой окажется $2+1$ -мерная или $1+1$ -мерная модель пространства-времени. Такое изменение (уменьшение) размерности пространства при переходе к микромасштабам могло бы стать конкретной формой реализации общей идеи фундаментальной длины и дискретного пространства.

Однако главная трудность остается той же — отсутствие математической модели пространства-времени, обладающей, с одной стороны, достаточной гибкостью, чтобы описать возможные изменения (неизвестные заранее) свойств пространства вне области изученных физических явлений, и, с другой стороны, достаточно конкретно, конструктивно заданной, чтобы в рамки этой модели можно было включить обширный аппарат современной физики (т. е. область изученных явлений).

Именно с этой трудностью связано то, что Эренфест не мог рассмотреть все возможные n -мерные пространства, а рассмотрел лишь наиболее простые евклидовы пространства. Тем более он не мог рассмотреть математическую модель пространства-времени, в которой размерность зависела бы от масштабов явлений. Однако все это несколько не уменьшает значения эренфестовского анализа, после которого физики получили возможность смотреть на размерность пространства как на физическое понятие.

Глава IV

ВОЗНИКНОВЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТИ И ФИЗИКА

Предыстория топологической теории размерности (Пуанкаре, Брауэр, Лебег)

В истории топологической теории размерности обычно выделяют начальный период, к которому относят опубликованные в 1911—1913 гг. работы Пуанкаре, Брауэра и Лебега. В этих работах формировалось топологическое понятие размерности: идея индуктивного определения размерности Пуанкаре, превращенная в математическое определение Брауэром; замечательная идея Лебега — прообраз определения размерности с помощью покрытий; доказательство Брауэром топологической n -мерности пространства E^n .

Однако хронологические рамки первого периода (1911—1913 гг.) следует раздвинуть на десять лет, вплоть до начала века, чтобы включить в начальный этап первое появление идеи индуктивного топологического определения размерности и физико-психологическое рождение самого понятия топологической размерности (1901—1902 гг.). Действительно, если считать, как обычно [1], началом теории размерности статью Пуанкаре 1912 г. «Почему пространство имеет три измерения?» (в этой работе содержится индуктивное определение размерности, выраженное на вполне математическом языке), то, во-первых, остается без ответа вопрос о происхождении основной идеи, поскольку в этой работе определение размерности дается сразу в готовом виде, в то время как в работе 1902 г. это рождение происходит почти на глазах у читателя.

Во-вторых, пока считалось, что идея топологического определения размерности пришла к Пуанкаре лишь в 1912 г. (год его смерти), по существу не возникал вопрос, почему эту идею он сам не превратил в корректное математическое определение — он просто мог не успеть сделать это. Однако на этот же вопрос совсем не так легко ответить, если учесть, что соответствующей геометрической идеей Пуанкаре владел, по крайней мере, 10 лет. Возможный ответ на этот вопрос связан с отсутствием в то

время насущной математической потребности в подобном определении. Рассматриваемые тогда математические объекты (геометрические фигуры, пространства), как правило, могли быть достаточно просто и конструктивно заданы. Это отмечал и сам Пуанкаре, говоря, что топологический подход к размерности диктуется в основном философскими и физико-психологическими потребностями.

Прежде чем перейти к анализу дальнейшего развития идей Пуанкаре, паиболее ясно изложенных в его статье 1912 г., следует вернуться немного назад, к чрезвычайно важным для истории топологической теории размерности работам Брауэра и Лебега, опубликованным в 1911 г.

В статье Брауэра «Доказательство инвариантности числа измерений» впервые была доказана в общем случае топологическая неэквивалентность евклидовых пространств разных размерностей. Эта работа, во-первых, завершила целый ряд исследований, содержащих либо частные случаи (E^n при $n < 3$), либо только подходы к решению проблемы. Сам Брауэр в этой связи упоминает работы нескольких математиков.

Во-вторых, статья Брауэра, посвященная, казалось бы, весьма специальному вопросу, явилась опорным пунктом не только для построения топологической теории размерности, но в известном смысле и для топологии в целом. Действительно, если бы оказалось, что при топологическом отображении может не сохраняться размерность (понимаемая, например, как линейная размерность) геометрических объектов в E^n , то это означало бы, что класс топологических (гомеоморфных) преобразований слишком широк, чтобы иметь содержательные геометрические приложения. Ведь E^n и фигуры в нем — одни из самых обычных объектов в математике.

В этой связи можно вспомнить замечательный результат Кантора — доказательство теоретико-множественной эквивалентности множества точек квадрата (или вообще куба в E^n) и множества точек отрезка. Этот результат означал, что невозможно определить понятие размерности только на теоретико-множественном языке.

Работа Лебега, опубликованная в том же помере журнала, что и статья Брауэра, и сразу за ней, представляет собой отрывок из письма Лебега одному из издателей этого журнала. Эта трехстраничная заметка начинается словами: «Недавно, когда Вы мне говорили о доказательстве невозможности установить однозначное и не-

прерывное соответствие между точками двух пространств n и $n+r$ измерений, доказательстве, принадлежащем Брауэру, которое должно быть опубликовано в «Mathematische Annalen», я указал Вам принцип некоторых доказательств этой теоремы. Продемонстрирую Вам наиболее простое из этих доказательств». Эта теорема, как пишет Лебег, следует из обобщения одного предложения Жордана и формулирует замечательную теорему: «Если каждая точка n -мерной области D принадлежит по крайней мере одному из замкнутых множеств E_1, E_2, \dots, E_r , число которых конечно, и если эти множества достаточно малы, то общая точка имеется по меньшей мере у $n+1$ из этих множеств».

Правда, само первоначальное доказательство Лебега оказалось неудовлетворительным, и впервые эта теорема была полностью доказана в работе Брауэра 1913 г. «О естественном понятии размерности». В этой работе, завершающей первый период истории топологической теории размерности, Брауэр обращается к данному Пуанкаре определению размерности: «Континуум называется n -мерным, если с помощью одного или нескольких $n-1$ -мерных континуумов его можно разложить на раздельные части». Он показывает невозможность использовать это определение непосредственно в приведенном виде и уточняет его в двух направлениях. Во-первых, уточняет понятие «континуум» и, во-вторых, уточняет слова «с помощью одного или нескольких». При этом он приводит простой пример (двойной конус), когда множество может быть разделено одной точкой, но явно не одномерно.

Затем он переходит к определению размерности, для чего вводит следующим образом понятие «разделенности»: пусть A, B, C — три взаимно непересекающихся замкнутых подмножества пространства X . Множество B отделяет A от C , если каждое связное замкнутое множество в X , имеющее общие точки как с A , так и с C , имеет также общие точки с B . Именно в этом пункте первоначальное определение Брауэра отличается от определения Урысона. Описанное отношение множеств A, B и C Урысон называет «разрезом», а отделение определяет несколько иначе. Во время личной встречи с Урысоном Брауэр признал несовершенство своего определения и принял соответствующее уточнение [2].

Само определение размерности у Брауэра таково: пространство n -мерно, если для любых его двух непересекающихся множеств найдется $(n-1)$ -мерное (но не для

любых $(n-2)$ -мерное) замкнутое множество, разделяющее их. Нульмерным Брауэр называет пространство, не содержащее никакого континуума. Это исходный пункт индуктивной цепочки. Затем Брауэр, указав на недостатки в доказательстве Лебега теоремы о кратности покрытий куба в E^n , доказывает эту теорему и с ее помощью n -мерность (в смысле введенного им определения) куба в E^n .

Этой работой Брауэра 1913 г. завершился первый период в истории топологической теории размерности. В связи с этим возникают вопросы: почему Брауэр, решив проблему размерности в E^n , не поставил задачу построения общей теории размерности? Почему следующее существенное продвижение произошло только в 1921 г.? Почему именно П. С. Урысон и К. Менгер осуществили это продвижение? Обсуждение этих вопросов естественно связано с рассмотрением роли Урысона и Менгера в создании основ теории размерности.

Урысон и Менгер — создатели топологической теории размерности

П. С. Урысон (1898—1924) и К. Менгер (р. 1902) — создатели первой математической теории, основанной на понятии размерности пространства. Они открыли возможность распространить понятие размерности на широкий класс геометрических объектов и «оправдали новое понятие, сделав его краеугольным камнем чрезвычайно красивой и плодотворной теории, внесшей единство и порядок в большую область геометрии» [3].

Определение размерности, идея которого возникла у Пуанкаре и которое приобрело настоящую математическую форму у Брауэра, называется в настоящее время определением *большой индуктивной размерности* (обозначается Ind). Раз в этом названии есть слово *большая*, то можно предположить, что есть еще и малая индуктивная размерность, а поскольку в название входит также слово *индуктивная*, то можно предположить, что существует и неиндуктивная размерность. Так оно и есть на самом деле. С «неиндуктивной» размерностью мы познакомились в первой главе. Это размерность, восходящая к теореме Лебега и определяемая как минимальная кратность достаточно мелких покрытий (обозначается \dim).

Однако Урысон и Менгер в основу топологической теории размерности положили такое определение, которое сейчас называется определением *малой индуктивной размерности* (обозначение ind): пространство X называется n -мерным в точке p , если у точки p есть сколь угодно малые окрестности, границы которых имеют размерность, не больше $n-1$, но нет сколь угодно малых окрестностей, границы которых имеют размерность, меньшую $n-1$. Начальный пункт индуктивной цепочки образует пустое множество, которому приписывается размерность минус единица.

Нужно иметь в виду, что вначале Урысон и Менгер не считали, что есть три различных определения размерности. Считалось, что имеется определение размерности и два ее свойства, существование которых было доказано для довольно широкого класса топологических пространств. По существу же это означало (и было одним из важнейших первых результатов топологической теории размерности), что для широкого класса топологических пространств X совпадают три размерностных инварианта: $\text{ind } X = \text{Ind } X = \dim X$. Только впоследствии эти три величины стали рассматриваться как равноправные; основания для этого появились в конце 40-х годов, когда были построены первые примеры с несовпадающими значениями размерностей ind , Ind , \dim .

Возникла удивительная ситуация: одному, казалось бы, понятию размерности оказалось возможным сопоставить в топологии три различные, вообще говоря, величины. Уже одно это могло вызвать сомнение в пригодности топологического языка для описания физического понятия размерности. Впрочем, мы уже встречались с подобной ситуацией — одно понятие непрерывности пространства описывается математически *различными* способами.

Однако в 20-х годах при построении Урысоном и Менгером топологической теории размерности эта неоднозначность еще не была известна, и топологическое понятие размерности могло казаться естественным математическим уточнением физического представления о размерности. Это замечание вполне уместно потому, что когда знакомишься с биографиями замечательных математиков Урысона¹ и Менгера, особое внимание привлекает их весьма необычный интерес к физике.

¹ Интереснейший биографический материал о П. С. Урысоне содержится в книге его старшей сестры Л. С. Нейман «Радость

Первая научная публикация выдающегося математика П. С. Урысона была посвящена физике, и, что особенно любопытно, экспериментальной физике. В 1915 г. в «Журнале Русского физико-химического общества» была опубликована статья 17-летнего Урысона «Рентгеновская радиация трубки Кулиджа» [6]. В статье на семи страницах излагаются и обсуждаются результаты экспериментального исследования зависимости частоты рентгеновского излучения от напряжения, приложенного к электродам трубки Кулиджа (тип рентгеновской трубки). В начале статьи автор упоминает несколько работ различных авторов, затем подробно описывает сам эксперимент и излагает полученные результаты (с помощью рисунков и таблиц). Угадать в авторе статьи будущего выдающегося математика почти невозможно; скорее можно предсказать ему будущее основательного, аккуратного экспериментатора, настолько тщательно описаны детали эксперимента.

В формулировке выводов особенно интересно следующее место: «Вид кривой до максимума очень походит на параболу. Этот результат чрезвычайно важен, так как по теории квантов частота колебаний должна быть равна E/h , где E — энергия электрона (пропорциональная разности потенциалов), а h — фундаментальная константа Планка... получение же максимума совершенно не согласуется с теорией квантов. Итак, теория квантов оказывается несостоятельной для случая возбуждения рентгеновских лучей...». Может быть, только эта довольно наивная смелость в выводах говорит косвенно о некоторой «математичности» мировосприятия Урысона. Действительно, он стремится согласовать, связать наблюдаемые экспериментальные факты сразу с четким постулатом $E=h\nu$ (а не ограничиться констатацией фактов и допущением сложного, пока не известного механизма взаимодействия электронов с веществом анода). Не соответствует ли такое стремление аксиоматическому методу, наиболее естественному в математике?

Однако следует все же отметить, что нет свидетельств о каких-либо собственно математических интересах Урысона до его поступления в 1915 г. на физико-математиче-

открытия» [4]. В этой книге помещены воспоминания об Урысоне известных советских математиков, его друзей, учеников. Подробная характеристика математических работ П. С. Урысона содержится во вступительной статье П. С. Александрова к изданию трудов Урысона [5].

ский факультет Московского университета. Причем, по свидетельству П. С. Александрова, Урысон вначале предполагал стать физиком и только под влиянием лекций Д. Ф. Егорова и Н. Н. Лузина произошел поворот его научных интересов в сторону математики. В 1919 г. по предложению Лузина Урысон поступил в аспирантуру под его руководством. Из дневника Урысона [7] видно, как настойчиво, целеустремленно осваивал он новый математический материал. Осваивал активно, обнаруживая ошибки и слабые места у маститых авторов. По свидетельству Александрова, «даже самые аспирантские отчеты Павла Самуиловича надолго запомнились в среде московских математиков того времени...». С этого начался исключительно плодотворный период математического творчества Урысона. Этот период, одним из высших достижений которого стала построенная в 1921—1922 гг. теория размерности, продолжался всего четыре года и оборвался 17 августа 1924 г. — в результате несчастного случая П. С. Урысон погиб.

Не завершенные Урысоном работы, многие из которых существовали лишь в виде черновых набросков или даже только в устной форме, были подготовлены к печати в основном П. С. Александровым. Впоследствии работы П. С. Урысона с обширными примечаниями были собраны в изданных в 1951 г. его «Трудах по топологии и другим областям математики».

В подготовке рукописей Урысона к изданию участвовал и Л. Брауэр, который, несмотря на скептическое отношение к теоретико-множественной топологии вообще, очень высоко ценил Урысона (это, впрочем, неудивительно, поскольку работы Урысона пронизаны замечательными геометрическими идеями и отнюдь не сводятся только к аксиоматической стороне общей топологии). В связи с трагической гибелью П. С. Урысона Брауэр писал его опцу: «Я так горячо полюбил Вашего высокоодаренного и любезного сына, что легко могу понять, как тяжела потеря. Для математиков его смерть — неповторимая утрата. Он был бы выдающимся математиком. Я переживаю эту потерю вместе с Вами». Он пишет также о восхищении «его большим математическим дарованием. Особенно могучим и удивительным в той части математики, которую я растил, — топологии».

Первая работа Менгера по теории размерности — рукописная заметка, децонированная (говоря современным

языком) в Венской академии наук, относится к осени 1921 г., когда ее автору было 19 лет. Первые результаты Менгера несовершенны по сравнению с результатами Урысона. Однако независимость первых результатов и фундаментальные дальнейшие работы Менгера дают основание считать его одним из создателей теории размерности.

Что могло стимулировать поиски Урысоном и Менгером теории размерности? Что помогало им видеть естественность и необходимость поставленной цели — определить понятие размерности для возможно более широкого класса математических моделей пространства? На эти вопросы можно предложить ответ, связанный с рассмотрением взаимодействия физики и математики.

Роль физики

в математическом творчестве Урысона и Менгера

Близкий друг Урысона, один из крупнейших советских математиков П. С. Александров таким образом характеризует его: «Последовательно материалистическое мировоззрение Павла Самуиловича заставляло его видеть в математике науку о действительном мире, и всевозможные идеалистические направления в философии математики были глубоко чужды и антипатичны его конкретному уму, уму естествоиспытателя. П. С. Урысон недаром начал свою научную работу с физики: струя „физического мышления, всегда была в его творчестве, основным стимулом которого была неукротимая жажда подлинного, живого познания действительности» [8].

Физика для Урысона — это не только несложные физические опыты в детстве, но и первая научная работа — вполне серьезное экспериментальное исследование рентгеновского излучения (хотя уже и одно это — уникальное обстоятельство для биографии математика XX в.). Важно отметить, что зимой 1922/23 г. Урысон основательно и с большим увлечением изучал теорию относительности. Вместе с П. С. Александровым он добывает средства для командировки за границу, прочитав цикл из четырех публичных лекций под названием «О математическом познании мира в свете теории относительности» в январе 1923 г.

В 1923/24 учебном году Урысон читал один из первых в Московском университете курс по теории относитель-

ности. В осеннем семестре курс назывался «Математические основы принципа относительности», в весеннем — «Математические основы теории относительности» [9]. Большой объем этого курса (по 4 часа еженедельно) дает основание думать, что в курс включалась и общая теория относительности. Это подтверждает также известный советский математик Д. Е. Меньшов, хорошо знавший Урысона.

Одновременно с чтением курса по теории относительности Урысон вместе с Александровым вели семинар по топологии. Как известно, теория относительности рассматривает структуру физического пространства-времени в связи с физическими процессами, происходящими в нем. Можно думать, что для Урысона слово *пространство* в его работах по топологии и слово *пространство* в физической теории относительности не были всего лишь омонимами.

Хотя в работах Урысона по теории размерности нет прямых указаний на возможную связь этой теории с физикой, по отдельные его замечания, по-видимому, свидетельствуют об этом. Рассмотрим несколько таких мест в основной работе Урысона по теории размерности «Мемуар о канторовых многообразиях. Размерность».

П. С. Александров пишет, что путь Урысона к теории размерности начался с того, что Д. Ф. Егоров в 1921 г. поставил перед ним задачу внутреннего определения наиболее общих множеств, которые можно было бы называть линиями или поверхностями (по терминологии Урысона, канторовыми кривыми и поверхностями, или проблемы K_1 , K_2). Однако сам Урысон пишет об этом несколько иначе: «Д. Ф. Егоров в личном разговоре (летом 1921 г.) привлек мое внимание к важности внутренних определений. В это же время я особенно интересовался проблемой J_2 . Д. Ф. Егоров заставил меня понять весь интерес, который представляет проблема K_2 ».

Урысон называет n -мерным жордановым многообразием J_n множество, топологически эквивалентное n -мерному кубу в E^n . В самом начале мемуара Урысон формулирует проблему: «Дать чисто геометрическое определение n -мерных жордановых многообразий», т. е. определению, не сводящееся просто к возможности некоторого отображения. Он пишет, что «чисто математический интерес этих проблем значительно меньше, чем их философский интерес (который весьма значителен)...». Можно думать, что здесь смысл слова «философский» близок к смыслу,

который вкладывал в это слово Пуанкаре, говоря о неудовлетворенности философа «арифметическим» определением размерности. Это значение по существу близко к физическому смыслу понятия и в случае размерности многообразия сводится к необходимости выявить внутренние причины возможности соответствующего топологического отображения на E^n .

Затем уже Урысон приступает к проблеме K_n («Указать наиболее общие множества, которые могут еще быть названы линиями, поверхностями и т. д.»), отмечая, что в этом случае нет даже «плохого» определения. Весь его мемуар и посвящен проблеме K_n . Однако проблему J_n Урысон не оставляет просто в стороне, а рассматривает ее в некотором смысле как дальнейшую цель: «...понятие отделения (имеется в виду условие отделенности множеств, с помощью которого Урысон вводит определение индуктивной размерности.— Г. Г.) позволит нам полностью разрешить все проблемы K_n ... Оно позволяет еще получить новое решение проблемы J_1 , опирающееся на локальное определение, весьма вероятно, что можно было бы получить все тем же методом решение других проблем J_n ».

Таким образом, еще до поставленных Егоровым проблем $K_{1,2}$ Урысон интересовался проблемой размерности, а точнее, числа измерений. Однако проблема J_n оказалась гораздо более трудной, чем K_n (при $n > 1$). Следует подчеркнуть, что к современной физике (и в 1921 г. и в 1982 г.) гораздо большее отношение имеет как раз проблема J_n , а точнее, J_3 и J_4 , так как риманово многообразие общей теории относительности — наиболее глубокой на сегодняшний день теории физического пространства-времени — локально есть J_4 .

Подводя итог описанию полученных им результатов в вводной главе, Урысон пишет: «...полученные результаты позволяют впервые пролить некоторый свет на до сих пор не выясненный вопрос о том, что такое число измерений. Мне кажется действительно, что ответ, который я предлагаю, вполне сообразен замыслу Пуанкаре». Урысон ссылается на работу Пуанкаре 1912 г., в которой проблема числа измерений ставится не как чисто математическая проблема, а как физико-математическая. Легко допустить, что и Урысон имел в виду физико-математическую проблему: в пользу этого говорят его слова «некоторый свет», ведь чисто математическая проблема по существу решается самым определением и проверкой его корректности.

Как отмечает Александров: «Именно понятие канторова многообразия П. С. Урысон считал центральным в созданной им теории... Любопытно отметить, что самую свою работу по теории размерности Павел Самуилович назвал „Мемуар о канторовых многообразиях“». Урысон n -мерным канторовым многообразием называл n -мерный континуум, который остается связным после удаления из него любого множества размерности, меньшей $n-2$, т. е. в высокой степени топологически однородное пространство. Александров не указывает причин выделения Урысоном именно канторовых многообразий. Не связано ли это особое отношение Урысона к канторовым многообразиям с тем, что высокая однородность физического пространства, по крайней мере на классическом уровне, не вызывает сомнений?

В вводной главе Урысон указывает на «различие между интегральными определениями (касающимися интегральных свойств, т. е. свойств множества в целом) и локальными определениями (относящимися к свойствам множества в окрестности одной из его точек)» и отдает предпочтение именно локальным определениям: «Роль этого принципа (использование локальных определений, — Г. Г.) в вопросах, которые мы собираемся изучать, очень велика. Это вытекает из следующего очевидного замечания: понятие (до сих пор не определенное) числа измерений жорданова многообразия (т. е. топологического образа куба в E^n), общее определение которого позволило бы распознавать линии, поверхности, тела и т. д., является, как легко сообразить, интегральным понятием локального происхождения. (К той роли, которую играет принцип локальности определений в моих изысканиях, привлек мое внимание П. С. Александров: я всегда бессознательно следовал этому принципу, но не замечал этого)».

Слова «очевидно» и «как легко сообразить» не имеют, конечно, доказательной силы, и для более общего класса топологических пространств, чем рассматривавшиеся Урысоном, основное значение имеет как раз нелокальное определение размерности с помощью покрытий (не совпадающее, вообще говоря, с индуктивной размерностью). Таким образом, речь идет о субъективном ограничении, происхождение которого может быть связано с тем, что фундаментальный язык физики по существу вплоть до настоящего времени, и уж во всяком случае язык классической физики, — это язык дифференциальных уравнений, т. е. существ-

венно локальный язык. Не в этом ли причина «бессознательного» предпочтения локальных определений?

В связи с обсуждаемым вопросом очень интересны воспоминания Д. Е. Меньшова. По его словам, Урысон интересовался физикой даже в тот период, когда он создавал теорию размерности — целый математический мир. По мнению Меньшова, после топологического периода Урысон обязательно бы переключился на теоретическую физику — настолько у него были сильны физические интересы.

В первых работах К. Менгера по теории размерности не удастся выявить отчетливый физический подтекст. Возможно, отчасти это связано с тем, что эти работы — небольшие заметки в отличие от главной работы Урысона, в которой есть обширная вводная часть, содержащая замечания, в частности, в математического и автобиографического характера. Однако по крайней мере в более поздних работах Менгера нельзя не заметить довольно отчетливо выраженный интерес к физике².

В этом смысле характерна статья Менгера «Теория относительности и геометрия» в томе, посвященном 70-летию Эйнштейна. В ней Менгер обсуждает, в частности, возможность использования в физике вместо риманова многообразия более общих пространств; при этом особое сомнение вызывают у него свойства непрерывности и дифференцируемости (именно на этот пункт, как мы помним, обратил внимание Эйнштейн в своем ответе на статью Менгера). В статье видно если не глубокое знание Менгером актуальных проблем физики, то вполне физическая мотивация его математического творчества. В качестве примера можно указать на знакомство Менгера с знаменитой статьей Г. Минковского 1908 г.: «...я отваживаюсь разрабатывать идею Минковского о том, что законы природы могут найти свое наиболее совершенное выражение в установлении отношений между мировыми линиями» [10]. Он прямо связывает также с возможной геометриза-

² Стоит еще упомянуть, что Менгер начал научную работу (и защитил диссертацию) под руководством Г. Хапа — одного из близких друзей П. Эренфеста в последние гимназические и первые студенческие годы (в «неразлучную четверку» входили П. Эренфест, Г. Герглотц, Г. Хап и Г. Титце). Не исключено поэтому, что неявным стимулом к менгеровскому анализу понятия размерности в 1921 г. могли быть отчасти статьи Эренфеста 1917 и 1920 г. о трехмерности пространства.

цией физики микромира две введенные им геометрические концепции: статистическое метрическое пространство и нелокальная геометрия, в которой точка не является первичной сущностью.

Понятие статистического метрического пространства Менгер ввел в 1942 г. Так он назвал множество, для любой пары элементов которого задана функция распределения, порождающая «расстояние» — случайную величину — и удовлетворяющая условиям, обобщающим обычные постулаты метрического пространства: неотрицательность, симметричность, невырожденность и неравенство треугольника. В качестве одного из возможных приложений этого понятия Менгер прямо указывает физический микромир. Физики заметили работы по статистическим метрическим пространствам, хотя никаких реальных физических теорий, основанных на этой идее, пока нет.

Почему именно Урысону и Менгеру удалось построить первую теорию размерности? Не умаляя значения собственно математических стимулов творчества, можно предположить, что естественнонаучные, физические интересы Урысона и Менгера могли помочь им при построении теории размерности. Эта помощь как осознание естественности и необходимости поставленной цели — построения общей теории размерности — могла осуществляться, например, следующим образом.

Зная гораздо более общие математические модели пространства, чем евклидова, легко было увидеть определяющую произвольность предположения о евклидовой трехмерной (или даже псевдоримановой четырехмерной) структуре физического пространства (пространства-времени). Эта неокончателность евклидовой модели физического пространства была еще ясней при учете уже свершившегося отказа эйнштейновской ОТО от евклидовой структуры физического пространства (правда, только в глобальном, а не в локальном масштабе). Можно было учесть также и общий факт ограниченности физической информации о свойствах пространства, получаемой из ограниченного (в частности, по пространственным масштабам) диапазона физических явлений. Поэтому естественным могло быть стремление построить максимально общую (или хотя бы более общую, чем E^3 или R^{3+1}) математическую модель реального физического пространства. Не менее естественно желание сохранить возможность говорить о таком фундаментальном свойстве физического пространства, как раз-

мерность. Отсюда вытекает задача: построить достаточно общую математическую модель пространства, в которой сохраняет смысл понятие размерности.

Быть может, предложенная гипотеза сформулирована слишком прямолинейно. Но, с другой стороны, слишком уж нетипичны для математиков XX в., занимающихся такой абстрактной областью математики, как топология, естественнонаучные интересы Урысона и Менгера.

В этой связи нельзя не вспомнить также математическое творчество одного из величайших математиков XIX в. — Б. Римана, которое он сам воспринимал, по-видимому, подчиненным физическим целям [11]. Воздействие физического мироощущения Римана на его математическое творчество не стало менее плодотворным из-за того, что ему так и не удалось построить единую физическую теорию.

Известно, что стимулирующая идея совсем «не обязана» быть правильной в узко практическом, сиюминутном смысле слова. В данном случае, несмотря на полувековое интенсивное развитие самой топологической теории размерности, приходится констатировать, что до сих пор физике пространства-времени эта теория непосредственно никак не пригодилась. Это подводит вплотную к более общей проблеме, рассматриваемой в следующей главе.

Глава V

РАЗМЕРНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ И СОВРЕМЕННАЯ ФИЗИКА

**В каком смысле выделено значение
размерности пространства-времени,
равное $3+1$?**

Факт $3+1$ -мерности физического пространства-времени после того, как Эренфест установил его связь с конкретными физическими явлениями, встал в один ряд со многими другими физическими фактами по степени обоснованности, но, конечно, не по степени фундаментальности. Однако значение размерности пространства оказалось обоснованным слишком разнородными явлениями: спектр атома,

распространение электромагнитных волн, движение планет. Неудивительно поэтому стремление свести размерность к более глубоким свойствам реального мира, т. е. найти такое свойство, которое (естественно, в рамках определенной теории) привело бы одновременно и к выделенности 3+1-мерности, и к другим фундаментальным физическим положениям, считающимся сейчас независимыми.

Подобное стремление «вывести трехмерность», как мы видели в вводной главе, было еще у Канта. На эту его попытку обычно не обращают внимания, однако именно с нее молодой Кант начал свой анализ. Он попытался, как мы помним, связать трехмерность пространства с тем, что 3 — наименьшее число, предшествующее составному.

После того как теория относительности принесла представление о 4-мерном пространстве-времени, предметом аналогичных размышлений стало число 4. В частности, об этом числе размышлял английский астрофизик А. Эддингтон (1882—1944). Ему принадлежит не только первое экспериментальное подтверждение ОТО в 1919 г., но и ряд фундаментальных теоретических результатов. Кроме того, он написал несколько замечательных научно-популярных книг. В одной из них Эддингтон забавным образом попытался основать факт 4-мерности на таком наблюдении (уже не чисто математического характера). Он обратил внимание [1] на то, что всякое измерение длины предполагает наличие двух протяженных объектов, например двух палок — измеряемой и эталонной. А поскольку, как известно, каждая палка — о двух концах, то получаем, что общее число концов равно числу 4. Никакой более вразумительной «теории размерности» Эддингтону не удалось придумать, хотя в такой теории он очень нуждался. Дело в том, что он пытался, исходя из числа, равного размерности пространства-времени, получить все безразмерные фундаментальные константы физики¹.

¹ Наиболее известной была его формула для постоянной, имеющей фундаментальное значение в квантовой электродинамике:

$$1/\alpha = \hbar c / e^2 = 1 + n^2(n^2 + 1)/2 = 137 \text{ при } n=4.$$

Эта формула производила некоторое впечатление, когда экспериментально измеренная величина $1/\alpha$ была равна 137 с точностью до второго десятичного знака. Однако повышение точности измерений привело к обнаружению ненулевых десятичных знаков (согласно современным данным $1/\alpha = 137,036$),

Другой пример дает работа уже современного американского физика Д. Фипкельштейна [2], в которой делается попытка построить модель квантового пространства, переходящую в классическом пределе в пространство-время ОТО. В этой работе фундаментальное значение имеет некий двоичный код и размерность пространства-времени связана вполне определенным образом с двоичностью этого кода. Если бы этот подход привел к жизнеспособной физической теории, то считающееся образцом тривиальности соотношение $2 \times 2 = 4$ оказалось бы связанным с фундаментальным свойством материального мира — размерностью пространства-времени, сведенной к квантовым свойствам микромира. Следует подчеркнуть, что работа Фипкельштейна не нацелена на получение величины размерности. Здесь $3+1$ -мерность — лишь одно из следствий предполагаемой теории. И это, по-видимому, единственно возможный подход к «выводу» размерности, чего нельзя сказать о самой конкретной реализации такого подхода. Этого нельзя сказать хотя бы потому, что известно много других гипотез и предварительных конструкций, имеющих аналогичные цели и также не доведенных до состояния, которое позволило бы ставить вопрос об их экспериментальной проверке.

Однако и независимо от того, удастся реализовать вывод размерности или нет, предпринимаются попытки осмыслить выделенность $3+1$ -мерности. Заранее ясно, что обоснование этой выделенности чисто математическими средствами совершенно бесперспективно. И вовсе не потому, что нет математических фактов, выделяющих число 3 (или $3+1$). Наоборот, таких фактов слишком много. Разумеется, математическое свойство, на которое обратил внимание Кант (то, что 4 — первое составное число), — не единственное, и далеко не самое интересное свойство такого рода. Существует целая коллекция математических утверждений, выделяющих даже не просто число 3, а размерность пространства, равную трем. Но... можно указать и такие математические утверждения, которые выделяют другие значения размерности. Поэтому вплоть до появления физической теории, в которой какие-то из этих математических фактов превратятся в физически осмысленные утверждения, не будет, по-видимому, оснований заменить прямую констатацию трехмерности пространства на какое-то математическое обстоятельство, выделяющее число 3. Но и такой, неизбежный сейчас постулатив-

ный характер утверждения о трехмерности пространства оставляет возможность для анализа.

В этом случае размерность пространства предстает в виде определенного параметра, характеризующего (вместе с другими космологическими параметрами и фундаментальными физическими константами), нашу Метагалактику. Факт трехмерности пространства связан с фундаментальными свойствами материального мира. Однако эти связи остаются неявными до тех пор, пока обычная, трехмерная, физика рассматривается сама по себе, а не на фоне других, n -мерных «физик». Только рассмотрение трехмерности как одного из возможных предположений о размерности пространства позволяет выявить глубокие связи трехмерности с другими важнейшими структурами физического мира [3].

Понимание размерности как некоего космологического параметра ведет также к известной проблеме единственности модели Вселенной. Эта проблема, не разрешимая в рамках ОТО, может быть сформулирована как проблема выбора начальных условий для уравнений Эйнштейна в космологической задаче. Обычная постановка физических задач предполагает возможность задания произвольных начальных условий, и эти различные начальные условия можно реализовать в действительности. Вселенная же существует всего «в одном экземпляре», и поэтому произвольность начальных условий в космологии теряет обычный смысл.

Эта ситуация привела, в частности, к предположению, что набор параметров (включая размерность пространства и величины фундаментальных констант), которые можно рассматривать как начальные условия, характеризует не всю Вселенную в целом, а лишь одну из многих ее частей — Метагалактику; при этом сам набор параметров (и, в частности, трехмерность) объявляется случайным [4] (в неопределенном пока смысле) или по крайней мере лишь одним из возможных².

Предпринимаются также попытки решить проблему космологических начальных условий (а тем самым и сегодняшних космологических параметров) с помощью совместного учета ОТО и квантовых закономерностей («принцип

² Подобную точку зрения высказывал еще Кант. Один из параграфов его первой работы так и называется: «§ 8. В подлинно метафизическом смысле представляется истинным, что может существовать более чем один мир».

неведения» Хокинга [5]). На этом пути предполагается получить как наиболее вероятные реальные космологические параметры, в частности близость плотности к критической величине и тепловой характер реликтового космологического излучения. Можно пытаться и $3+1$ -мерность пространства-времени также получить как наиболее вероятную величину.

Поскольку здесь речь идет лишь о наиболее вероятной (а не однозначно определенной) величине, то кажется правомерным вопрос: почему все-таки *наше* пространство-время $3+1$ -мерно? Наиболее привлекательный ответ на этот вопрос сейчас, по-видимому, таков: пространство-время $3+1$ -мерно потому, что только в таком пространстве-времени может естественным образом возникнуть сам этот вопрос. При этом дающие такой ответ предполагают, что только в $3+1$ -мерном мире может возникнуть система, сравнимая по сложности с человеком, который задает себе подобные вопросы. 1- и 2-мерное пространства исключаются как недостаточные для сколько-нибудь сложно устроенной нервной системы, а более чем 3-мерное — для биологической эволюции на планете, устойчиво движущейся вокруг звезды [6]. Как показал еще Эренфест, устойчивое движение планеты возможно только в трехмерном пространстве.

Другими словами, предлагается считать, что поиски ответа на вопрос, почему наше пространство трехмерно, не более (но и не менее) осмысленны, чем поиски ответа на вопрос, почему наше Солнце — звезда именно такого типа (а не белый карлик или красный гигант, например). Ответ на второй вопрос, очевидно, заключается в том, что белый карлик или красный гигант не обеспечили бы условий, необходимых для возникновения цивилизации, в которой мог бы возникнуть сам вопрос. Такого рода обоснование выдвигается по поводу и других космологических параметров и соотношений [7].

Однако что касается размерности, то трудно признать полностью удовлетворительным не только ответ, но и саму формулировку вопроса. В частности, утверждения о том, что в пространстве другой размерности были бы нестабильны атомы или невозможно возникновение жизни и разума, приобретают какой-то смысл только при фиксации характера физических законов (принцип суперпозиции, вид динамических уравнений и т. п.). А ведь если речь идет не о реальном наблюдаемом физическом пространстве, а лишь о возможном, то по поводу соответствующей этому прост-

ранству «возможной» физики сказать ничего нельзя. В этом качественное отличие от эренфестовской постановки вопроса о размерности наблюдаемого реального физического пространства в различных физических условиях.

Физическое пространство-время и топология

Обратимся теперь к вопросу, который в явной или неявной форме возникал в предыдущих главах.

Почему топологическая теория размерности «не пригодилась» физике? Ведь наибольшее на сегодняшний день обобщение представлений о размерности пространства, используемых в физике, дает топология. Это, казалось бы, автоматически должно приводить к тому, что вопрос о размерности пространства должен задаваться природе на топологическом языке. По существу так и предполагается в некоторых работах, посвященных этой проблеме [8]. При этом говорится о топологических свойствах физического пространства, топологическом определении размерности и т. д.

Такая позиция упрощает, а может быть, даже искажает реальную ситуацию, поскольку в настоящее время не известно никаких способов построения физики, сохраняющей (в смысле принципа соответствия) хотя бы элементы обычной физики в пространстве более общем, чем так называемое многообразие. Но многообразие локально устроено в точности как евклидово пространство. Поэтому с точки зрения современной физики невозможно даже сформулировать вопрос о размерности пространства, по общности существенно отличающийся от подхода Эренфеста. В этом подходе, напомним, использовались только евклидовы пространства разных размерностей, но не более общие топологические пространства.

Другое, более существенное обстоятельство состоит в том, что само понятие топологического пространства, появившееся (практически в современном виде) еще в 1914 г., если его использовать для описания реального физического пространства, возможно, вообще плохо согласуется с релятивистской квантовой теорией. Действительно, понятие топологического пространства подразумевает в качестве первичного понятия точку. Но понятие точки, восходящее еще к евклидовскому «то, что не имеет длины», кажется чуждым языку релятивистской квантовой

теории, в которой принцип неопределенности совместно с релятивистской возможностью рождения частиц ограничивает абсолютную точность определения пространственно-временных размеров. Из подобных соображений возникла гипотеза минимальной, или фундаментальной, длины [9]. Эта гипотеза вызвала появление целого направления в теоретической физике, включающего в себя подходы и некоторые конкретные модели: «дискретное пространство», «квантованное пространство», «элементарная длина». Первые работы этого направления появились еще в конце 20-х — начале 30-х годов, всего через несколько лет после построения квантовой механики, и имели цель — решить проблему бесконечности электромагнитной массы электрона и даже проблему строения атомного ядра. Проблема ядра была решена, как известно, более традиционными (с нынешней точки зрения) средствами, однако идея дискретного пространства неоднократно возобновлялась в разных формах вплоть до последнего времени [10, 11].

Это направление естественнее всего называть проблемой фундаментальной длины, поскольку общим элементом всех попыток было введение в физику некоей фундаментальной величины с размерностью длины. В то же время конкретные способы введения такой величины существенно различны и каждый в отдельности на сегодняшний день уязвим для критики.

Легко понять, даже не рассматривая конкретные модели, что само предположение о существовании фундаментальной длины не согласуется с представлением о фундаментальности топологической модели пространства. Во-первых, физически бессмысленным оказывается обычное понятие точки — исходное понятие топологии, и, во-вторых, введение фундаментальной длины возможно только на метрическом языке, который в обычной математической иерархии структур менее фундаментален, чем топологический.

Но метрический язык вовсе не обязан сводиться к обычному понятию метрического пространства (это, впрочем, следует уже из того, что пространственно-временная структура, рассматриваемая теорией относительности, не есть метрическое пространство, так как в ОТО естественным образом возникает только закононеопределенная двухточечная функция). Можно лишь предполагать, что этот новый метрический язык должен как-то обобщать понятие интервала в ОТО. В духе квантовых идей метрическая

функция может превратиться в оператор, и тогда, возможно, топология возникнет только после операции соответствующего усреднения либо возникнет сразу спектр топологий.

Косвенная иллюстрация этого — статистические метрические пространства, введенные в математику значительно позже обычных метрических пространств (К. Менгер, 1942 г.). Топологию в такое пространство можно ввести несколькими неэквивалентными путями, т. е. с одной и той же метрической структурой (понимаемой уже в обобщенном смысле) можно согласовать неэквивалентные топологии. Таким образом, традиционная иерархия топологических и метрических свойств, как оказывается, может быть нарушенной уже в математике. Так следует ли настаивать на ней в физике?

В соответствии с указанными обстоятельствами вызывает сомнение сведение проблемы размерности реального физического пространства к анализу его топологических свойств. Когда говорят о топологической структуре реального пространства, не отождествляют ли физическое пространство и некоторую (неточную) его модель?

В связи с этим следует помнить, что известная сейчас в математике иерархия «пространственно-подобных» свойств (в которой определенным образом описанные метрические свойства менее фундаментальны, чем топологические) возникла в начале века без воздействия только что открытой области квантовых явлений. Можно ли быть уверенным, что математические концепции, возникшие безо всякого влияния квантовой физики, могут удовлетворить все потребности новой теории? Надеяться на это и предпринимать соответствующие попытки, конечно, можно (общая теория относительности, в которой использовано понятие риманова пространства, возникшее еще в середине XIX в., — пример успеха подобной попытки), но нельзя считать, что математика заведомо содержит все концепции, необходимые современной ей физике.

Несоответствие между топологическими представлениями о размерности пространства и потребностями физики более конкретно можно проиллюстрировать следующим образом. В физике существуют основания считать осмысленным следующее утверждение: для явлений достаточно больших пространственно-временных масштабов пространство-время $3+1$ -мерно и вместе с тем для достаточно малых — дискретно [11]. Довольно неопределенное выраже-

ние «дискретность в малых масштабах» можно понимать как нульмерность или по крайней мере не $3+1$ -мерность. Другая обсуждаемая возможность состоит в том, что на малых расстояниях нельзя вообще ввести определенную размерность [12].

Однако в рамках топологических представлений о размерности пространства невозможно даже моделировать подобную ситуацию, т. е. согласовать $3+1$ -мерную («в большом») и возможную дискретную («в малом») структуры пространства и учесть возможность изменения размерности при изменении масштаба явления.

Чтобы пояснить сказанное, рассмотрим простой пример. Пусть множество $D_0^3(a)$ — бесконечная кубическая решетка с шагом a в трехмерном евклидовом пространстве E^3 , т. е. множество точек с координатами (k_1a, k_2a, k_3a) , где $k_{1,2,3}$ — целые числа. Можно было бы ожидать, что «пространство» $D_0^3(a)$, при достаточно малом a (или, точнее, при рассмотрении подмножеств $D_0^3(a)$, достаточно больших по сравнению с a) достаточно хорошо приближалось бы по свойствам (и, в частности, по размерности) к E^3 . Однако с точки зрения топологии подобное утверждение бессмысленно, поскольку в силу топологических определений размерность «пространства» $D_0^3(a)$ равна нулю независимо от величины a . Топологическое определение размерности по существу локально, т. е. относится к «сколь угодно малой» окрестности точки, и не может «замечать» переход через какой-то выделенный масштаб a . Более того, даже пространство, состоящее из всех рациональных точек E^3 (т. е. точек, у которых все координаты — рациональные числа), топологически нульмерно, хотя такое пространство кажется вообще физически неотличимым от E^3 .

Аналогичным образом можно рассмотреть «пространства», образованные совокупностями кривых $D_1^3(a)$ или поверхностей $D_2^3(a)$ в E^3 , плотность расположения которых характеризуется расстоянием a (например, таким образом: для каждой точки p из E^3 найдется точка, принадлежащая D и удаленная от p на расстояние, не большее, чем a). В этих случаях вместо ожидаемого с точки зрения «физического здравого смысла» перехода от 3 -мерности «в большом» к 1 -мерности (2 -мерности) «в малом» топологические определения дают сразу, независимо от величины a , 1 -мерность $D_1^3(a)$ и 2 -мерность $D_2^3(a)$.

Рассмотренные простые примеры свидетельствуют о невозможности в рамках топологических представлений

придать смысл утверждению о зависимости размерности от масштабов явления. Но, может быть, не только топологическое, но и всякое другое математическое оформление понятия размерности вообще (как говорится, по природе своей) не может реализовать указанное выше пожелание здравого смысла? Нет, ситуация, скорее, обратная, и возможностей реализовать идею переменной размерности существует несколько.

Для того чтобы описать одну из таких возможностей, рассмотрим внимательнее, как реально действующие в физической теории представления о числе измерений соотносятся с топологическим подходом к размерности.

Создание общей теории относительности — наиболее глубокой на сегодняшний день физической теории пространства-времени — не требовало математических моделей пространства, более общих, чем многообразие, и представлений о размерности, более общих, чем количество координат. Даже в современной физике не видно никакой реальной альтернативы координатному описанию, которое позволяет рассматривать поведение любой физической системы. Хотя понятие размерности многообразия имеет топологическую природу, никакой необходимости в общих топологических определениях размерности в случае многообразия нет, так как сама структура многообразия автоматически предполагает задание определенной размерности.

Топологический подход к размерности был бы перспективен, если бы развитие физики (и в первую очередь осуществление полного синтеза ОТО и квантовой теории) привело к отказу от рассмотрения метрической структуры пространства и принятия в качестве основного объекта изучения его топологических свойств; в этом случае обращение к топологическим определениям размерности было бы неизбежно. Однако в настоящее время такой ход событий кажется маловероятным; в частности, не видно величин, которые могли бы играть в этом случае роль динамических переменных, описывающих состояние и эволюцию такой физической системы, как пространство-время. Поэтому для развития эйнштейновской теории пространства-времени желательным кажется скорее обобщение понятия многообразия, обобщение метрической и координатной структуры пространства (понятия интервала и метрического тензора g_{ik}) с отказом от локальной структуры пространства, тождественной структуре E^4 . Тогда

понятие размерности могло бы остаться связанным с понятием количества координат, но только координаты уже понимались бы в обобщенном смысле.

Физика по существу навязывает нам параметрическое представление о размерности пространства. «Работающие» физические понятия — число степеней свободы, количество динамических переменных в уравнениях движения, количество компонент физического поля и т. д. — подсказывают необходимость реализации именно параметрического представления о размерности, или, лучше сказать, о *числе измерений* пространства. Это представление действительно было бы связано с «количеством измерений», необходимых для описания состояний физической системы.

Как показал еще Г. Кантор, если способ параметризации ничем не ограничивать, то реализовать параметрический подход к размерности невозможно. Топология (применительно к многообразию) ограничивает способ параметризации требованиями взаимной однозначности и непрерывности. Но это не единственный возможный тип ограничения. Если считать заданной метрическую структуру пространства, то способ параметризации точек пространства можно ограничить требованием, чтобы сами параметры имели метрический смысл.

Чтобы конкретно сформулировать такое ограничение, обратим внимание на следующее свойство n -мерного евклидова пространства E^n : для того чтобы задавать положение точки в E^n с помощью ее расстояний до набора (базиса) некоторых фиксированных точек, необходимо, чтобы в этом наборе было ровно n точек. Меньшего числа точек в базисе недостаточно, так как задание соответствующих расстояний выделяет в общем случае бесконечное количество точек (например, в E^3 задание расстояний до двух точек дает окружность); большее число точек в базисе избыточно. Таким же свойством обладает n -мерное псевдоевклидово пространство (пространство-время Минковского); при этом роль расстояния играет интервал.

В результате мы получаем возможность ограничить способ параметризации тем, что в качестве параметров точки разрешается использовать только ее расстояния до других точек. Обобщая эту конструкцию, можно ввести следующее понятие размерности: назовем область в пространстве n -мерной, если для ее параметризации в указанном выше смысле необходимы базисы из n точек.

Нетрудно убедиться, что определенная таким образом размерность может зависеть от величины области.

Таким образом, учет метрической структуры пространства дает возможность ввести понятие размерности, более гибкое, чем топологическое. Но, разумеется, одна только математическая реализуемость сложной размерностной структуры пространства не делает ее физически оправданной. Подобные попытки стали бы физически оправданными, если бы обнаружались действительные признаки излишней жесткости обычной математической модели физического пространства. $3+1$ -мерность пространства времени надежно обоснована не только в области макроскопических явлений («обыденного» опыта), но после эренфестовского анализа и в гораздо более широком диапазоне физических явлений: от атомных до астрономических масштабов. Поэтому отклонение от $3+1$ -мерности можно обсуждать только по отношению к явлениям вне этого диапазона, к экстремальным состояниям вещества. Такие состояния рассматриваются в физике элементарных частиц и в квантовогравитационной космологии, описывающей эволюцию ранней Вселенной (эти области физики, как мы увидим, смыкаются). При этом, конечно, причину «А почему бы и нет?» (т. е. только логическую возможность) нельзя считать достаточной для подобного анализа. Внимания заслуживают только такие выходы «за рамки», которые связываются с нерешенными физическими проблемами.

Но прежде чем рассматривать с этой точки зрения ситуацию в физике элементарных частиц и в космологии, стоит задуматься над вопросом: существуют ли пределы геометрического описания физической реальности?

Физика и геометрия

Размерность — это геометрическое понятие. Если позволено усомниться в абсолютности факта трехмерности пространства при расширении диапазона изучаемых физикой явлений, то ведь можно усомниться и в применимости геометрических понятий вообще для описания физической реальности при достаточном удалении от области макроскопических явлений. Что можно сказать по поводу возможности такого будущего на основании знания прошлого во взаимоотношениях физики и геометрии?

Рассматривая историю этих взаимоотношений, можно прийти к двум выводам. Во-первых, несомненно, что у геометрического описания всегда обнаруживались пределы. И, во-вторых, столь же несомненно, что у геометрического описания предела не было; всегда после возгласа «Король умер!» раздавалось «Да здравствует король!», и на трон возводилась новая геометрия.

Геометрическое описание ньютоновской физики, которое можно символически представить в виде произведения $E^3 \times T$, наткнулось на пределы при достаточно глубоко проникновении в область электромагнитных явлений. Причем, несмотря на то что теория электромагнитного поля была создана по существу еще в 60-х годах прошлого века, осознание необходимости заменить ньютоновские представления о пространстве и времени было достигнуто только в первом десятилетии нашего века. Но даже и после создания теории относительности и возникновения понятия о пространстве-времени Минковского M^{3+1} «геометричность» происшедшей революции не была общепризнанным фактом. Даже Эйнштейн вначале недооценил геометрию Минковского, считая ее лишь неким формальным приемом. Только когда Эйнштейн начал работать над построением теории тяготения, согласованной с теорией относительности, он обнаружил, что точка зрения Минковского позволяет продвинуться вперед. Правда, это продвижение в силу собственной логики вскоре опять привело к обнаружению пределов геометрического описания. Как оказалось, достаточно глубокое проникновение в область гравитационных явлений требует замены геометрии Минковского M^{3+1} на геометрию Римана R^{3+1} .

Кто мог в 1865 г. увидеть в уравнениях Максвелла что-либо говорящее о грядущей геометрической революции, связанной со специальной теорией относительности? Кто мог в известном еще Галилею факте, что в гравитационном поле движение тел не зависит от их свойств, увидеть необходимость перехода к римановой геометрии искривленного пространства-времени? Тем более никто не мог в неоднозначности величины электромагнитного потенциала увидеть намек на то изменение геометрической компоненты физической теории, которое связано уже с нашим временем. Физическое название новой геометрии — теория калибровочных полей, математическое — геометрия расслоенных пространств. Как выяснилось относительно

недавно, все четыре фундаментальных взаимодействия (сильное, слабое, электромагнитное и гравитационное) обладают общим свойством — так называемой калибровочной симметрией; первым проявлением этого свойства как раз и была возможность менять электромагнитные потенциалы, не изменяя наблюдаемые характеристики поля (напряженности). Такая общность всех фундаментальных взаимодействий очень укрепила у физиков надежду на построение единой теории всех взаимодействий.

Рассказ о теории калибровочных полей увел бы нас далеко от основной темы. Поэтому ограничимся самым необходимым. Геометрия расслоенного пространства, которая составляет математический язык теории калибровочных полей, берет за основу пространство-время Минковского M^{3+1} , но при этом изменяет понятие мировой точки, или события. Каждое событие теперь характеризуется не только пространственными и временной координатами, но и значениями некоторого набора из N полей (N может быть разным в различных вариантах теории). Точка теперь уже не «то, что не имеет частей», а целый мир, устроенный вполне определенным образом; можно также сказать, что роль каждой точки теперь исполняет некоторое N -мерное (внутреннее) пространство $S^{(N)}$. Точно так же, как переход от одной системы координат к другой в евклидовом пространстве не меняет геометрические взаимоотношения различных фигур, так и изменение системы координат, или калибровочное преобразование, в каждом внутреннем пространстве не должно менять физическую ситуацию.

Геометрию расслоенного пространства будем обозначать символом $M^{3+1} \times S^{(N)}$; знак произведения здесь имеет примерно такой же смысл, как и в обозначении ньютоновского пространства-времени $E^3 \times T$.

На основе геометрии расслоенного пространства уже удалось построить вполне удовлетворительную и даже отмеченную Нобелевской премией (Вейнберг, Глэшоу, Салам, 1979 г.) теорию, объединяющую электромагнитное и слабое взаимодействия. Разрабатывается калибровочная теория сильного взаимодействия — так называемая квантовая хромодинамика. И, наконец, уже сейчас намечаются контуры теории, объединяющей все четыре типа взаимодействий. В основу этой теории, называемой супергравитацией, кладется геометрическое описание, объединяющее черты геометрии ОТО, т. е. R^{3+1} , и гео-

метрии расслоенных пространств $M^{3+1} \times S^{(N)}$ — так называемое суперпространство, которое мы обозначим символом $SR^{3+1+(N)}$.

Подытожим сказанное схемой сменяющих друг друга геометрических описаний

$$\begin{array}{ccc} R^{3+1} & \xrightarrow{\quad} & SR^{3+1+(N)} \\ \uparrow & & \uparrow \\ E^3 \times T \rightarrow M^{3+1} & \xrightarrow{\quad} & M^{3+1} \times S^{(N)} \end{array}$$

Пунктирные линии соответствуют еще не пройденным в полном смысле наукой путям. Переход от $M^{3+1} \times S^{(N)}$ к $SR^{3+1+(N)}$ аналогичен переходу от $E^3 \times T$ к M^{3+1} , при этом знак произведения \times растворяется в структуре, связывающей «сомножители» гораздо более тесно. В то же время этот переход аналогичен переходу от M^{3+1} к R^{3+1} , поскольку здесь также жестко заданная структура геометрии заменяется на принцип взаимной связи геометрии с ее физической «начинкой».

Следует подчеркнуть, что пунктиром падо было бы изобразить не только пути к символу $SR^{3+1+(N)}$, но и сам этот символ. Речь идет об идеях, находящихся в стадии разработки. Речь идет не только о суперпространстве, но и о суперграндиозных целях. Ведь вместе с построением единой теории всех взаимодействий должна быть решена и проблема квантования гравитации, поскольку само объединение должно быть достигнуто на квантовой основе.

И вот здесь как раз можно увидеть недостаточность приведенной схемы. В ней геометрия физического пространства (физическая геометрия) слишком оторвана от самой физики. Эта схема не говорит, чем определялся каждый из переходов к новой геометрии. Положение можно улучшить, если около стрелок на схеме поместить обозначения фундаментальных физических констант, подлинный учет которых в физической теории совмещался с переходами к новому геометрическому описанию:

$$\begin{array}{ccc} R^{3+1} & \xrightarrow{\quad} & SR^{3+1+(N)} \\ \uparrow G & & \uparrow \\ E^3 \times T \xrightarrow{c} M^{3+1} & \xrightarrow{\hbar} & M^{3+1} \times S^{(N)} \end{array}$$

Из многочисленных физических констант (включающих, в частности, массы многочисленных элементарных частиц, величину элементарного заряда и т. д.) здесь мы видим только три константы: c — скорость света, G — гравитационная постоянная, \hbar — постоянная Планка. Эти три константы действительно занимают особое положение в физике: с точки зрения современной теории эти константы имеют отношение ко *всякому* физическому явлению; их можно не учитывать только по соображениям, связанным с требуемым уровнем точности теоретического описания.

Однако и второй вариант схемы не полностью отражает гармонию физической теории. Если учесть, что у

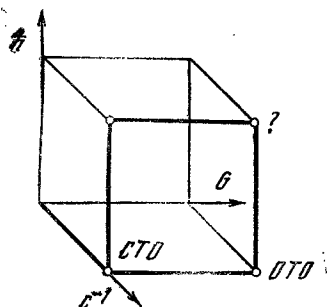


Рис. 4. $cG\hbar$ -система координат в «пространстве» теоретической физики

верхней пунктирной стрелки следует поставить букву \hbar , а у боковой пунктирной — G , то можно обнаружить, что такой схеме вообще тесно в двумерном пространстве листа бумаги. Нужно выйти в третье измерение. Лучше всего это сделать с помощью замечательного изобретения известного советского ученого А. Л. Зельмапова — схематического изображения «пространства» теоретической физики, пространства, точками которого являются различные теории. Это так называемый «куб теорий», по осям которого отложены вместо координат значения скорости света (точнее, ее обратной величины), гравитационной константы и постоянной Планка (рис. 4). Конечно, считать, что значения этих величин могут отличаться от c^{-1} , G и \hbar , можно только условно, характеризуя степень учета константы в данной теории: если некоторая «координата» теории равна нулю, это значит, что соответствующая константа в теории вообще не учитывается; если эта координата меньше действительного значения данной константы или равна ему, то это значит, что

константа учитывается в теории приближенно или полностью. Приведем примеры: теория с координатами $(0, 0, \hbar)$ — это квантовая механика, $(0, G, 0)$ — ньютоновская теория гравитации, $(c^{-1}, 0, 0)$ — СТО, $(c^{-1}, G, 0)$ — ОТО и т. д., или, несколько иначе, квантовую механику можно называть \hbar -теорией, ньютоновскую теорию гравитации — G -теорией, СТО — c -теорией, ОТО — cG -теорией, релятивистскую квантовую теорию гравитации — $cG\hbar$ -теорией. В этом трехмерном $cG\hbar$ -представлении пространства физических теорий нетрудно увидеть и интересующую нас схему сменяющихся геометрических моделей; ее образуют ребра куба, соединяющие вершины $(0, 0, 0)$, $(c^{-1}, 0, 0)$, $(c^{-1}, G, 0)$, $(c^{-1}, 0, \hbar)$ и (c^{-1}, G, \hbar) .

Тот факт, что на схеме истории физической геометрии появились константы c , G , \hbar , имеет самое прямое отношение к вопросу о пределах геометрического описания. Дело в том, что на пути превращения пунктирных линий на нашей схеме в сплошные стоит очень серьезная проблема, даже подходов к которой сейчас почти не видно. Речь идет о несовместимости римановой структуры пространства-времени и квантовых представлений, т. е. о квантовых границах применимости общей теории относительности, или релятивистской теории гравитации, и в то же время о гравитационных границах применимости релятивистской квантовой теории. Существование таких границ, соответствующих, как мы увидим, определенным значениям характерных физических величин, подрывает надежды на достижение синтеза общерелятивистских и квантовых идей только с помощью уже известных теоретических конструкций.

Впервые вопрос о совместимости ОТО и квантовой теории возник у самого Эйнштейна. Ему физика обязана, как известно, не только общей теорией относительности, но и фундаментальным развитием квантовой теории. В 1916 г., всего через несколько месяцев после создания в целом ОТО, Эйнштейн рассматривал вопрос о гравитационных волнах, само существование которых вытекало из уравнений ОТО. Он вывел формулу для интенсивности гравитационного излучения и неожиданно (во всяком случае, для читателя) заметил следующее: «...атом, вследствие внутриатомного движения электронов, должен излучать не только электромагнитную, но и гравитационную энергию, хотя и в ничтожном количестве. Поскольку в природе в действительности ничего подобного не должно

быть, то, по-видимому, квантовая теория должна модифицировать не только максвелловскую электродинамику, но также и новую теорию гравитации» [15].

Эйнштейн здесь имеет в виду неразрешимую для доквантовой физики проблему стабильности атома. Как известно, она состояла в том, что по законам классической (максвелловской) электродинамики движение электрона вокруг ядра должно сопровождаться непрерывным излучением. В результате потери энергии электрон должен приближаться к ядру по спиральной траектории. Если излучение электромагнитной энергии электроном рассчитывать по тем же формулам, что и излучение радиостанции (а других формул в классической электродинамике нет), то получим абсурдный результат: электрон должен упасть на ядро за время порядка 10^{-10} с! А ведь атом по веским причинам представлялся наиболее стабильной физической структурой. Классической физике так и не удалось справиться с этой трудностью. Проблема «высвечивания» атома была решена, как уже говорилось, только в модели атома Бора, в которой центральное место занимала константа \hbar .

Однако аналогия гравитации и электромагнетизма, которую, казалось бы, имел в виду Эйнштейн, далеко не очевидна. Если воспользоваться формулой Эйнштейна для интенсивности гравитационного излучения, то окажется, что «высвечивание» энергии атома в форме гравитационных волн происходит за характерное время 10^{36} с $= 10^{29}$ лет. Так что уже ни о каком непосредственном противоречии с эмпирическими данными говорить не приходится. И все же эффект гравитационной нестабильности атомов Эйнштейн отвергнул. Это, по-видимому, связано с его космологическими представлениями. В работе Эйнштейна 1917 г., в которой родилась релятивистская космология, предполагалась статичность картины Вселенной. А в статической Вселенной, существующей вечно, эффект нестабильности атомов недопустим независимо от величины самого эффекта. Любопытно сопоставить эту позицию, вполне оправданную для состояния астрономии того времени, с тем, что в наше время возможная нестабильность протона (характеризуемая, кстати, близкой величиной времени жизни) упоминается в нобелевских лекциях 1979 г. даже как предпочтительная [16].

Так переплелись судьбы квантовой гравитации и космологии. Но в действительности, как мы вскоре увидим

эти судьбы переплетены еще теснее, и на самые глубокие вопросы космологии нельзя ответить, не зная, что находится в вершине $cG\hbar$ -куба, наиболее удаленной от начала координат, т. е. в вершине с координатами (c^{-1}, G, \hbar) .

А путь к этой вершине (подходят оба смысла слова) преграждает, как уже нам известно, вопрос о совместности ОТО и квантовой теории. Впервые на точном физическом языке этот вопрос был рассмотрен замечательным советским физиком М. П. Бронштейном (1906—1938) [17]. В 1935 г. Бронштейн выполнял первое глубокое исследование, посвященное квантованию гравитационного поля. В основном его работа была посвящена случаю слабого гравитационного поля, который дает возможность не учитывать геометрический характер гравитации, т. е. кривизну пространства-времени. Однако эта работа содержит также очень важный анализ, который показал, что если не ограничиваться условием слабости и «негеометричности» гравитационного поля, то обнаружится, что обычный подход к квантованию полей и понятия римановой геометрии недостаточны для создания полной квантовой теории гравитационного поля. Одновременно обнаружили и сами границы области существенно квантовогравитационных явлений. В результате Бронштейн пришел к фундаментальному выводу, что подлинное квантование гравитации «требует радикальной перестройки теории и, в частности, отказа от римановой геометрии, оперирующей,— как пишет Бронштейн,— принципиально не наблюдаемыми величинами, а может быть, и отказа от обычных представлений о пространстве и времени и замены их какими-то гораздо более глубокими и лишенными наглядности понятиями».

Несмотря на то что со времени, когда были написаны эти слова, прошло почти полвека, они не только не утратили силы, но даже стали еще более актуальными для современной физики элементарных частиц и космологии.

Воспроизвести рассуждения Бронштейна без привлечения сложных физических понятий довольно трудно. Поэтому мы выберем более легкий путь, который приведет к границам области квантовогравитационных явлений. Чтобы пройти этот путь, не обязательно знать такую сложную вещь, как уравнения Эйнштейна. Все, что нам понадобится,— это ньютоновский закон тяготения; положение теории относительности о том, что скорость

света — максимальная возможная скорость тела; модель атома Бора (тем самым в рассмотрение включаются соответственно константы G , c , \hbar). По существу мы отправляемся в 1913 г., когда появилась боровская квантовая модель атома. К тому времени уже в течение восьми лет была известна максимальность скорости света и в течение нескольких столетий — ньютоновский закон тяготения.

Но до этого мы еще посетим 1899 г., тот его майский день, когда на заседании Академии наук в Берлине состоялся доклад М. Планка «О необратимых процессах излучения». В этом докладе впервые было сказано о существовании новой универсальной физической константы, которая впоследствии была названа постоянной Планка \hbar . В том же докладе появились величины, которые в 1957 г. американский физик Дж. Уилер назвал планковскими и которые имеют самое непосредственное отношение к квантовой гравитации.

Что такое «планковские величины» и какое отношение они имеют к квантовой гравитации?

Сам Планк ни о каком квантовании гравитации не думал и ввел эти величины из совсем других соображений. Более того, в докладе 1899 г. даже константа \hbar не имела еще квантового смысла (не было еще представлений о квантах энергии $E = \hbar\omega$). Введение этой константы позволило Планку вначале лишь написать формулу для спектра теплового излучения, согласующуюся с экспериментальными данными. Планку, в течение пяти лет пытавшемуся решить проблему теплового излучения, была ясна фундаментальность новой константы. По-видимому, именно универсальность новой постоянной побудила его в том же докладе 1899 г. обратиться к вопросу, в общем-то не связанному с основной темой, к вопросу о естественных единицах измерения. В конце своего доклада Планк обратил внимание на то, что выбор единиц во всех используемых системах единиц «сделан не исходя из общей точки зрения, обязательно приемлемой для всех мест и времен, но исключительно исходя из потребностей нашей земной культуры», и, как он пишет, «нетрудно себе представить, что в другое время, при из-

менившихся внешних обстоятельствах, любая из употребляемых до настоящего времени систем единиц частично или полностью утратила бы свое первоначальное естественное значение».

В связи с этим Планк отмечает, что, опираясь на новую постоянную \hbar , а также на скорость света в вакууме c и гравитационную постоянную G , «мы получаем возможность установить единицы длины, массы, времени и температуры, которые не зависели бы от выбора каких-либо тел или веществ и обязательно сохраняли бы свое значение для всех времен и для всех культур, в том числе вземных и нечеловеческих, и которые поэтому можно было бы ввести в качестве «естественных единиц измерений». Новые (естественные) единицы выбираются так, чтобы в новой системе единиц каждая из указанных констант обращалась в единицу. Таким образом Планк получает единицы длины, массы, времени:

$$l_{\text{пл}} = (\hbar G/c^3)^{1/2} = 1,6 \cdot 10^{-33} \text{ см}, \quad (1a)$$

$$m_{\text{пл}} = (\hbar c/G)^{1/2} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ г}, \quad (1б)$$

$$t_{\text{пл}} = (\hbar G/c^5)^{1/2} = 5 \cdot 10^{-44} \text{ с} \quad (1в)$$

(здесь используются современные обозначения и величина констант).

Нетрудно понять, что аналогичным образом можно получить «естественную единицу» и для любой другой физической величины. Для плотности, например,

$$\rho_{\text{пл}} = c^5/G\hbar = 5 \cdot 10^{93} \text{ г/см}^3. \quad (1г)$$

Поставленная Планком цель ввести естественные единицы измерения, пригодные «для всех времен и народов», не нашла поддержки. В частности потому, что набор $cG\hbar$ не имел существенных преимуществ (по крайней мере в 1899 г.) перед другими наборами. Кроме того, один взгляд на величины планковских единиц отбивает всякое желание называть их естественными. Если величины $l_{\text{пл}}$ и $t_{\text{пл}}$ падают чудовищно далеко от области досягаемости современной физики (достижимые сейчас величины имеют порядок $l \sim 10^{-16}$ см и $t \sim 10^{-26}$ с), то величина $m_{\text{пл}}$ совсем уж несуразна — это примерно масса самой обычной и вполне будничной пылинки.

И даже сам Планк через некоторое время перестал вспоминать о своих естественных единицах.

Глубокий физический смысл введенных Планком величин стал ясен только через много десятилетий, когда выяснилось, что планковские величины определяют квантовые границы применимости общей теории относительности и в то же время гравитационные границы релятивистской квантовой теории [18].

Рождение квантовой теории было вызвано тем, что в классической теории электромагнитного поля существовали серьезные трудности, одна из которых называлась даже катастрофой (к тому же еще ультрафиолетовой). И преодолела эти трудности квантовая теория, можно сказать, с помощью новой константы \hbar . Вскоре стало ясно, что подобная «помощь» потребуется также и теории гравитационного поля. На это обстоятельство, как уже говорилось, в 1916 г. обратил внимание А. Эйнштейн. Долгое время объединение гравитации и квантовой теории не привлекало внимание физиков (отчасти, возможно, из-за обилия гораздо более насущных задач, связанных с атомной физикой). Точнее говоря, считалось, что при этом объединении никаких особых, новых вопросов (отличных от вопросов, связанных с синтезом теории электромагнитного поля и квантовой механики) не появляется.

Только после того, как в 1936 г. была опубликована работа М. П. Бронштейна, стало ясно, что подлинное объединение теории гравитации и квантовой теории — это сложная проблема, которую нельзя решить, пользуясь простыми аналогиями с электродинамикой. И именно планковские величины указывают на ту область физических явлений, в которой известные методы не могут дать даже приближенного описания. Трудность построения теории квантовой гравитации видна уже из того, что эта теория, несмотря на многочисленные остроумные попытки, не создана до сих пор, спустя 65 лет после осознания Эйнштейном необходимости такой теории и 45 лет после того, как Бронштейн выяснил существенные особенности, которыми она должна обладать. Таким образом, в настоящее время в физике существуют две общие теории — ОТО, которую можно назвать «сG-теорией», поскольку в ней учитываются эти константы, и квантовая теория, или \hbar -теория, но нет пока сG \hbar -теории, из которой следовали бы и сG-теория (при условии $\hbar \rightarrow 0$) и \hbar -теория (при условии $G \rightarrow 0$).

Как можно понять тот факт, что область физических явлений, для описания которых необходима $sG\hbar$ -теория, ограничена планковскими параметрами?

Рассмотрим простую систему, состоящую из двух одинаковых точечных частиц массы m , связанных гравитационным взаимодействием и вращающихся по круговой орбите радиуса r со скоростью v (эту систему можно было бы назвать «молекулой гравития»). Как описывать состояние такой системы? Ясно, что параметры m и r можно выбрать так, что получится двойная звездная система, для описания которой вполне достаточно ньютоновского закона тяготения. Однако в общем случае надо учесть и существование константы \hbar ; проще всего это сделать с помощью главного элемента боровской модели атома — требования, чтобы момент импульса системы был целым кратным \hbar .

Итак, подчиним нашу систему классической механике и ньютоновскому закону тяготения

$$ma \equiv mv^2/r = Gm^2/(2r)^2, \quad (2)$$

а также квантовому постулату Бора

$$2mvr = n\hbar, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

С помощью уравнения (2) можно выразить v через r и m . Поэтому характер системы полностью определяется двумя параметрами — r и m . Разделим область всевозможных значений параметров r и m на части, в которых для описания системы достаточно только G -теории (ньютоновской теории гравитации) или понадобится еще \hbar -теория (квантовая теория) и s -теория (теория относительности). Для этого следует учесть, что \hbar -теория необходима, когда n достаточно близко к единице, скажем $1 \leq n \leq 2$, а s -теория необходима, когда скорость близка к скорости света, скажем $c/2 < v < c$, т. е. получаем неравенства:

$$\frac{c}{2} < v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Gm}{r}} < c, \quad (4)$$

$$1 \leq n = \frac{\sqrt{Gm^3r}}{\hbar} \leq 2. \quad (5)$$

Каждое из этих неравенств делит область значений r и m на три части (рис. 5). В результате объединения этих неравенств область значений r и m делится на пять частей: невозможные значения ($v > c$ или $n < 1$), G -область,

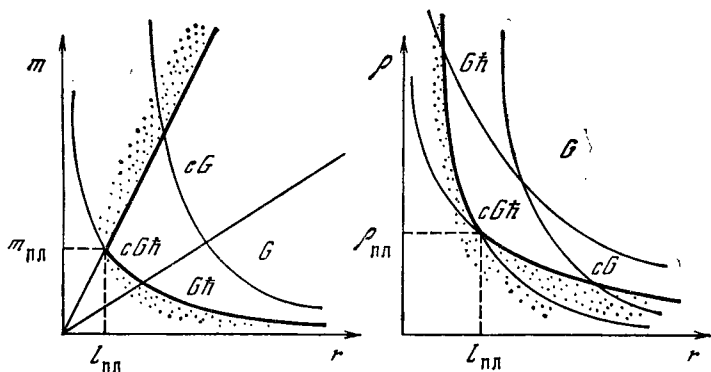


Рис. 5. Границы области квантовогравитационных явлений ($cG\hbar$), полученные с помощью ньютоновского закона тяготения и квантового постулата Бора в координатах m, r и ρ, r . Точками отмечена область невозможных значений параметров, G — область ньютоновской теории тяготения, cG — область ОТО, $G\hbar$ — нерелятивистская квантовогравитационная область (фиктивная из-за игнорирования всех негравитационных взаимодействий)

cG -область, $G\hbar$ -область и, наконец, $cG\hbar$ -область, соответствующая области квантовогравитационных явлений. При этом мы приходим к планковским величинам. Разумеется, к полученным результатам нельзя относиться совершенно серьезно: ведь мы с помощью понятий и законов классической физики углубились в область, где они заведомо неприменимы. Но теперь уже легче поверить, что и более серьезный анализ также приводит к планковским величинам как к границам области квантовогравитационных явлений.

Зачем нужна $cG\hbar$ -теория?

Мы много говорим о будущей $cG\hbar$ -теории, или о теории квантовой гравитации, а так ли уж она необходима? Известны ли уже сейчас какие-нибудь явления, процессы, для описания которых не обойтись без $cG\hbar$ -теории? Или чудовищное отличие планковских величин (1) от значений, доступных современной экспериментальной физике, означает, что эта теория понадобится не раньше, чем через несколько столетий?

Нет, такие явления известны уже сейчас. Одно из интереснейших относится к космологии и состоит в следующем. Как известно, окружающая нас Вселенная состоит

из галактик (точнее говоря, из скоплений галактик), в одну из которых — Млечный Путь или Галактику (с большой буквы) — входит вместе с десятком миллиардов других звезд и наше Солнце. Одна из важнейших величин в космологии — средняя плотность вещества во Вселенной ρ . Эта величина получается, если массу, содержащуюся в объеме, размеры которого гораздо больше среднего расстояния между галактиками, разделить на этот объем. Фундаментальный наблюдательный факт состоит в том, что где бы ни выбирать такой объем, величина плотности получается примерно одной и той же (это свойство означает однородность Вселенной). Зависимость ρ от времени определяется уравнениями общей теории относительности Эйнштейна. В настоящее время $\rho \sim 10^{-30}$ г/см³.

Согласно наблюдениям среднее расстояние между галактиками со временем увеличивается. Это означает, что в прошлом плотность была больше нынешней, причем согласно ОТО — сколь угодно больше, а формально — некоторое время назад ($\sim 10^{10}$ лет) плотность равнялась бесконечности. Теперь самое время вспомнить, что ОТО — это всего лишь sG -теория, не учитывающая существование константы \hbar , и что, начиная с планковской плотности $\rho_{пл}$, забывать о квантовогравитационных эффектах никак нельзя. Таким образом, развертывая в прошлое историю Вселенной по законам ОТО, или sG -теории, мы неизбежно приходим к такой стадии, для описания которой совершенно необходима $sG\hbar$ -теория.

Но, может быть, если речь идет о событиях миллиардолетней давности, интерес к $sG\hbar$ -теории питается только праздным любопытством? Нет, не только. Дело в том, что теория гравитации Эйнштейна, являющаяся основой современной космологии, позволяет предсказать развитие событий в том случае, если известна ситуация на некоторый момент. Поэтому так важно знать, какое наследство получила Вселенная от $sG\hbar$ -эпохи своего развития. В этой эпохе заперты ответы на вопросы, касающиеся образования галактик, величины их массы и других физических параметров [19]. А ведь без ответов на такие вопросы остаются неясными и важнейшие вопросы, касающиеся происхождения Солнечной системы, жизни и, наконец, человека.

В свете $sG\hbar$ -теории могут проясниться не только космологические проблемы, но и астрофизические, в част-

пости конечная стадия эволюции звезд — так называемый гравитационный коллапс. Кроме того, следует не забывать, что новая теория всегда не только отвечает на старые вопросы, но и приводит к многочисленным, часто неожиданным следствиям.

С точки зрения современной физики, как уже говорилось, наиболее вероятным считается построение $cG\hbar$ -теории в рамках единой теории фундаментальных взаимодействий на основе синтеза идей эйнштейновской теории гравитации и принципа калибровочной симметрии, который с математической точки зрения выражается геометрией расслоенных пространств. Во всяком случае, уже сейчас активно обсуждающиеся «кандидаты» на роль $cG\hbar$ -теории устроены именно так.

Вернемся теперь к вопросу о пределах геометрического описания вообще и к вопросу о размерности пространства-времени в частности. Рассмотрение сменяющих друг друга геометрических описаний одного и того же физического пространства-времени заставляет поверить, что физическая геометрия, даваемая общей теорией относительности, не является истиной в последней инстанции (это становится особенно ясным, если на историю физики посмотреть не через призму эксперимента, а через $cG\hbar$ -куб теорий). Но, помимо этого, не может не произвести впечатление удивительная живучесть геометрии: обнаружение пределов одного геометрического описания преодолевалось в другом, более общем, или, точнее, более глубоком геометрическом описании физической реальности. Это могущество геометрии позволяет надеяться, что и $cG\hbar$ -теория будет построена на основе геометрии, $cG\hbar$ -геометрии.

Чем объясняется такое могущество геометрии? Этот вопрос, конечно, является лишь частью более широкого вопроса о «постижимой эффективности математики» в физике [20], по все же частью очень специфической. Трудно не прийти к выводу, что могущество геометрии в физике отражает некую объективную особенность устройства материального мира, пространственно-временной характер его структуры. Однако взаимоотношение геометрии и физики, каким оно видится сейчас при рассмотрении «пространства идей» теоретической физики в $cG\hbar$ -системе координат, оказывается не простым.

Можно ли утверждать, что постоянно возрастает роль геометрии в физике? И да и нет. Да, потому что в фи-

зике находят применение все более сложные геометрические модели. Нет, потому что это утверждение неадекватно описывает реальную ситуацию, и с не меньшим основанием можно сказать, что постоянно возрастает роль физики в геометрии (если иметь в виду физическую геометрию).

Действительно, физическая геометрия все более «впитывает» в себя физику.

По отношению к евклидовой геометрии легко могла возникнуть иллюзия, что это — порождение «чистого разума», не зависящее от негеометрической физической реальности. Но геометрия Минковского, впитавшая в себя чисто физический (во всяком случае, с точки зрения того времени) факт постоянства скорости света, уже могла рассматриваться по меньшей мере как геометрическая часть физической реальности. Переход к римановой геометрии ОТО, впитавшей в себя еще один физический факт (в форме принципа эквивалентности), лишил возможности считать геометрию отдельной частью физической реальности, геометрию скорее следовало сопоставить определенной проекции той же физической реальности. При этом сами геометрические понятия не могли даже быть физически осмыслены в отрыве от негеометрической компоненты теории. Переход от пространства Минковского к расслоенному пространству калибровочных теорий заменил понятие точки пространства-времени («не имеющей частей») на внутреннее пространство, описывающее состояние физического поля, динамика которого на фоне геометрии M^{3+1} должна давать физику. И, наконец, если супергравитация действительно сможет стать $cG\hbar$ -теорией, то, скорее всего, понятия пространственно-временных координат и физических полей перестанут отличаться столь принципиальным образом, и тогда можно было бы сказать, что геометрическое описание имеет физические пределы только потому, что физическое описание имеет геометрические пределы.

Такой прогноз развития взаимоотношений между физикой и геометрией обладает, возможно, лишь одним недостатком — он слишком однозначен. А ведь история физики с наибольшей ей доступной точностью свидетельствует о том, что в науке наименьшими шансами обладают именно однозначные прогнозы.

Несомненно, пожалуй, только то, что построение $cG\hbar$ -теории, освоение вершины куба с координатами (c^{-1}, G, \hbar)

открыли бы совершенно новую панораму физической реальности.

Какую же роль может сыграть понятие размерности в предстоящих грандиозных изменениях физической картины мира? Судя по всему, не только почетную, но и важную. О важности этого понятия говорит уже то, что $3+1$ -мерность уцелела во всех радикальных перестройках физической геометрии. Однако это не означает, что размерности и впредь суждено оставаться на недостижимой высоте. Многие признаки в современной физической ситуации говорят о том, что размерность может сыграть конструктивную роль в развитии физической теории. Даже при беглом просмотре оглавлений современных физических журналов нельзя не заметить, насколько чаще, чем в недавнем прошлом, там встречается слово размерность: модельные варианты теории поля в пространстве различной размерности и зависимость свойств этих моделей от значения размерности, понятие струн (т. е. 1-мерных объектов) в теории сильных взаимодействий, размерная регуляризация и т. д. Есть и более существенные, чем филологические, признаки. Включение в геометрию внутреннего пространства (пока не вполне определенной размерности), неразрывная связь четырех пространственно-временных координат и N координат пространства внутренних симметрий в супергравитации не только ставят вопрос о связи чисел N и $3+1$. Стирается различие между пространственно-временными степенями свободы и степенями свободы поля; тем самым можно ожидать динамически нетривиального поведения размерности физического пространства-времени. Ведь для калибровочных теорий характерно как раз такое нетривиальное поведение: спонтанное нарушение симметрии может снабдить массой изначальное безмассовое поле, интенсивность взаимодействия может убывать при сближении частиц и т. д.

Но не будем пытаться отгадать те ответы, которые могут быть получены только тяжким «физическим» трудом, и посмотрим на ситуацию с другой точки зрения. Какого рода новые возможности могла бы дать нетривиальная размерностная структура пространства-времени для физики элементарных частиц и космологии?

Размерность пространства-времени и физика элементарных частиц

Как уже говорилось в гл. 3, проблема размерности физического пространства, связываемая с конкретными областями физических явлений, неизбежно приводит к вопросу о мере жесткости математической модели реального физического пространства.

Действительно, с точки зрения наиболее глубокой на сегодняшний день физической теории пространства-времени (ОТО) о локальной структуре пространства, вплоть до сколь угодно малых расстояний, известно все. И эта структура совпадает со структурой псевдоевклидова 4-мерного пространства. Однако в таком описании предполагается слишком детальная информация, несовместимая даже с идеализированным экспериментом, а потому физически бессмысленная [21]. Предположение о том, что локальная структура пространства совпадает со структурой евклидова пространства, можно сравнить с требованием описывать спин элементарной частицы как обычное вращение шарика. В последнем случае физике пришлось, как известно, отказаться от избыточной (и неправильной) информации. Однако сам по себе отказ от каких-то элементов теории никогда не решает проблемы. Необходима конструктивная замена старых понятий новыми.

В основе одной из наиболее глубоких проблем релятивистской квантовой теории поля — проблемы расходимостей — лежит, как считается, слишком далекая экстраполяция свойств существующей математической модели физического пространства [22]. Впервые физики столкнулись с проблемой расходимости еще в классической теории электромагнитного поля, когда попытались учесть следующую из теории относительности точечность электрона в задаче о его собственной энергии, или об электромагнитной природе его массы. Действительно, собственная энергия U распределения электрического заряда e в объеме, характеризуемом радиусом a , является величиной порядка e^2/a ; отсюда при $a \rightarrow 0$ следует бесконечность U , или, как говорят физики, расходимость собственной энергии точечного электрона. В квантовой электродинамике эта расходимость приняла форму расходимости массы электрона, но количественно, так сказать, не изменилась; все это, конечно, относится не только к электрону, но и к другим частицам.

Еще в 40-х годах были предложены способы «борьбы» с этими расходимостями (методы перенормировки), которые позволяют получать определенные количественные предсказания в теории. Несмотря на то что эти предсказания с беспрецедентной точностью согласуются с экспериментом, сама процедура перенормировки, имевшая характер скорее рецепта, чем теории, не удовлетворяла даже ее авторов. Впоследствии метод перенормировки совершенствовался; было также выяснено, что кроме электродинамики существуют и другие перенормируемые теории поля. В настоящее время в связи с успехами теории калибровочных полей высказывается мнение, что для всех физически реальных полей метод перенормировки применим. Так или иначе, но проблема расходимости чрезвычайно важна для физики элементарных частиц.

Существуют различные отношения к методу перенормировки. Одни физики утверждают, что это — просто один из способов извлечения эмпирически проверяемых следствий из теории, не лучше и не хуже других. Другие считают реальный успех метода перенормировки свидетельством только того, что перенормируемость — это псевдоним какого-то глубокого свойства истинной теории (быть может, калибровочной инвариантности), которое окажется понятым и надлежащим образом математически описанным в будущей теории.

Какое отношение к проблеме расходимости могла бы иметь нетривиальная размерностная структура пространства? Уже в рамках классической теории поля можно дать иллюстрацию, связанную с расходимостью и демонстрирующую следствия перехода к меньшим размерностям пространства на малых расстояниях. Как уже говорилось, в классической электродинамике точечный электрон обладает бесконечной собственной энергией, т. е. энергия однородного (для простоты) распределения заряда e с радиусом a стремится к бесконечности при стремлении a к нулю ($e = \text{const}$). А какова собственная энергия такого распределения заряда в n -мерном пространстве? Уравнение Пуассона в n -мерном случае для однородного сферически-симметричного распределения заряда e с плотностью $\rho \sim e/a^n$

$$\operatorname{div} E = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{d}{dr} (r^{n-1} E) \sim \rho \sim \frac{e}{a^n}$$

дает напряженность электрического поля

$$E \sim er/a^n, \quad r < a;$$

тогда собственная энергия такого распределения

$$U = \int_{r=0}^a E^2 dV \sim e^2/a^{n-2}$$

(здесь всюду опущены постоянные коэффициенты типа 4π в трехмерном случае). Переходя к пределу $a \rightarrow 0$, получим, что при $n < 2$ точечный заряд обладает нулевой собственной энергией, при $n > 2$ — бесконечной и только при $n = 2$ — конечной собственной энергией. Таким образом, можно сказать, что для классического «двумерного электрона» не было бы проблемы расходимости собственной энергии.

В современной теоретической физике понятие размерности отнюдь не является центральным; и все же нельзя не заметить большого числа работ, в которых число измерений пространства подвергается активному и даже весьма вольному обращению. В этих работах физико-математические конструкции рассматриваются в пространстве-времени с размерностью, не равной четырем, в основном с двумя целями. Во-первых, для построения и анализа модельных вариантов рассматриваемых теорий некоторые характерные для 4-мерного случая трудности (в частности, упоминавшаяся проблема расходимости) решаются легче или даже вообще не возникают в случае меньших размерностей. Во-вторых, размерность привлекают для придания смысла результатам, бессмысленным в обычном математическом понимании. Используют даже не целочисленные значения размерности. Полагают, например, в общих формулах (полученных, естественно, для E^n , т. е. для целочисленных значений размерности), что размерность $d = n + \varepsilon$, при этом ε считается малой величиной; затем, устремляя ε к нулю или пользуясь разложением по ε , получают вполне определенные результаты (так называемая размерная регуляризация). Высказывается также надежда перенести полученные результаты с «маломерных» на реальный 3-мерный случай.

Существуют и другие идеи, имеющие отношение к понятию размерности. Для объяснения кварковых структур и, в частности, удержания кварков используются понятия одномерных (1+1-мерных) струн и двумерных

мешков. (Напомним, кстати, что удерживающие (т. е. увеличивающиеся на бесконечности) потенциалы появляются естественным образом, если предположить двумерность (тогда потенциал $\varphi \sim \ln r$) или одномерность ($\varphi \sim r$) пространства. Уже Эренфест установил, что для размерности $n < 3$ невозможно инфинитное движение.) Важнейшая особенность кварковой модели — насыщение кварковых систем (отсутствие адронов, состоящих из четырех или более кварков) — иногда соотносится с одно- и двумерной геометриями для взаимодействия, связывающего кварки [23]. Действительно, две или три точечные частицы естественным образом соответствуют линии и плоскости.

С другой стороны, возродились на совершенно новом уровне попытки использовать модели с пространством большого числа измерений ($> 3+1$); при этом согласование с макроскопической трехмерностью достигается тем, что «лишние» измерения «компактифицируются», т. е. пространство в этих измерениях предполагается замкнутым. Эти попытки имеют большую историческую традицию, восходя еще к пятимерным теориям поля, участие в разработке которых принимали, в частности, А. Эйнштейн и В. Паули. Нельзя и сейчас полностью исключить возможность того, что попытки решения некоторых проблем в микрофизике на основе геометрических моделей с размерностью, не равной трем, являются не просто методическими упражнениями, а имеют физический смысл. С этими идеями, в частности, связываются надежды на решение проблемы электрического заряда [24].

На весь этот обширный и пока еще полностью не осмысленный физикой материал можно было бы взглянуть с такой стороны. Если теоретические модели, использующие пространство с размерностью, не равной трем, действительно обладают замечательными свойствами, то может быть оперирование с малой размерностью — это не просто технический прием? Здесь напрашивается такая историческая аналогия. Как известно, Планк, вводя свою постоянную \hbar , также был уверен в том, что это — чисто технический прием, с помощью которого можно описать спектр теплового излучения. Впоследствии же, когда выяснилось, что квантовый постулат — это новый закон природы, физикам пришлось работать над тем, чтобы включить этот закон в физическую теорию и, в частности, согласовать дискретный и вероятностный харак-

тер квантовых явлений с макроскопически несомненной непрерывностью и классической (лапласовской) детерминированностью макроскопических явлений.

Релятивистские струны (1+1-мерные объекты) в теории сильных взаимодействий [25], модели теории поля и удержания кварков в пространстве с размерностью, не равной трем, рассматриваются сейчас, как правило, в качестве технических приемов, не имеющих физического смысла [26]. Но, может быть, это не просто технические приемы, а намеки на сложную размерностную структуру пространства-времени? Если, действительно, в случае меньших размерностей снимаются проблемы расходимостей и удается «удержать» кварки, то, может быть, это надо рассматривать как свидетельство меньшей, чем 3, размерности пространства на малых расстояниях? Ведь точно так же устойчивость планетных орбит и спектр водорода были связаны Эренфестом с трехмерностью пространства в соответствующем диапазоне расстояний. Может быть, следует не пытаться переносить n -мерные ($n \neq 3+1$) результаты в теоретической физике на «реальный» случай $n=3+1$, а развивать «маломерную» физику и научиться согласовывать ее с обычной 3+1-мерной?

На данном этапе развития физики элементарных частиц существуют причины, чтобы относиться скептически и к этим вопросам, и к аналогии с возникновением квантовой теории. Эти причины не сводятся только к тому, что применяющийся до сих пор математический аппарат, и в частности топологическое определение размерности, не дает возможности, как мы видели, даже моделировать такую ситуацию (изменение размерности при изменении масштабов явления). Есть более серьезная причина, чтобы скептически относиться к такой возможности. Сейчас преобладает точка зрения, основанная на реальных достижениях теории слабого и сильного взаимодействий, что в настоящее время необходимо последовательное развитие уже известных идей (теория электрослабых взаимодействий, квантовая хромодинамика, теория гравитации) и их объединение, а не попытки вовлечь в анализ такие «вечные» вопросы, как структура пространственно-временного описания. В периоды интенсивного развития теории, когда имеется обилие четко сформулированных и нерешенных задач, о «вечных» вопросах либо забывают [27], либо вообще объявляют их псевдовопро-

сами. К ним, в частности, относится вопрос о возможной дискретной структуре пространства в малом, о реализации идеи фундаментальной длины. (К таким вопросам можно было бы отнести и вопрос о «неевклидовой» размерностной структуре пространства, как некоторой конкретной реализации идеи дискретного пространства.) Сторонники этой точки зрения ссылаются еще и на неплототворность деятельности, направленной на решение этих вопросов (нелокальная теория поля, дискретное пространство-время, фундаментальная длина), несмотря на значительные усилия выдающихся физиков и большие надежды, связывавшиеся с этими усилиями.

Мнение о преждевременности кардинальных изменений в пространственно-временном описании поддерживается также следующими соображениями. Какую бы форму не имело обобщение пространственно-временного описания, должна существовать некоторая характерная величина l , соответствующая границе, начиная с которой учет изменения структуры пространства-времени становится существенным. (Удобно эту характерную величину считать длиной; любую другую величину — массу, энергию — можно соотнести с некоторой длиной.) В настоящее время наиболее естественной длиной такого рода кажется квантовогравитационная планковская длина $l_{пл} = (G\hbar/c^3)^{1/2} = 10^{-33}$ см. Действительно, поскольку гравитация и геометрия пространства-времени описываются одной теорией — общей теорией относительности, то величина $l_{пл}$ соответствует области, где геометрия должна приобрести существенно квантовые свойства и, в частности, станет непригодным классическое понятие риманова многообразия. Но внимание современной физики элементарных частиц сосредоточено на расстояниях $10^{-13} - 10^{-16}$ см, поэтому, как обычно считается (хотя высказываются и другие мнения), величина $l_{пл}$, на двадцать порядков меньшая, не имеет значения для физики элементарных частиц.

Не стоит, однако, думать, что величина $l_{пл}$ не имеет вообще никакого отношения к современной физике. Существует область, в которой величина $l_{пл}$ появляется естественным образом. Это квантовогравитационная космология, или космология ранней Вселенной, когда были существенны и гравитационные и квантовые эффекты. Посмотрим, какое значение для этой области может иметь вопрос о размерности пространства.

Проблема размерности пространства и космология ранней Вселенной

Четырехмерность пространства-времени является одной из основных геометрических предпосылок для фундаментальных физических теорий. Однако обоснованность факта $3+1$ -мерности, как и всякого физического факта, связана с определенным (и по необходимости ограниченным в данный момент) диапазоном физических явлений. В то же время наиболее глубокие проблемы современной космологии так или иначе имеют дело с границами применимости существующих теорий. К таким проблемам относится, в частности, проблема начальной космологической сингулярности, начальных космологических условий, проблема описания физических процессов, происходивших в начальный период расширения Вселенной.

Сам факт космологического расширения говорит о том, что в прошлом средняя плотность вещества во Вселенной была чрезвычайно (а формально, даже неограниченно) большой. Это, в свою очередь, означает, что в начальный период космологического расширения определяющими были квантовогравитационные явления, т. е. явления, для описания которых существенны величины и постоянной Планка \hbar (квантовость), и гравитационной постоянной G (гравитация), и скорости света c (релятивизм). Действительно, как мы видели, из трех фундаментальных констант \hbar , G и c строятся характерные квантовогравитационные, или планковские, параметры: плотность $\rho_{пл} = c^5/G^2\hbar \approx 10^{93}$ г/см³, длина $l_{пл} \approx 10^{-33}$ см, время $t_{пл} \approx 10^{-43}$ с и т. д. Поскольку плотность в расширяющейся Вселенной в прошлом была сколь угодно велика, то, в частности, была эпоха, когда плотность превышала $\rho_{пл}$ — эпоха квантовогравитационной космологии. Планковские параметры на много порядков отличаются от величин, доступных экспериментальному изучению современной физики. И тем не менее есть серьезные основания считать, что подлинное решение таких проблем космологии, как крупномасштабная изотропия и галактическая структура Вселенной, происхождение реликтового излучения и удельной энтропии, может быть достигнуто только при учете начальных космологических условий, при учете процессов, характерных для квантовогравитационной космологии. В настоящее время нет теории, в которой был бы осуществлен полный синтез теории гравитации и квантовой

теории, но уже из общих соображений ясно, что состояние материи, пространства и времени в квантовогравитационную эру могло существенно отличаться от обычного.

В самом деле, как известно, современная теория гравитационного поля (ОТО) — одновременно и физическая теория пространства-времени. ОТО рассматривает гравитационное поле как классическое, для чего используется математическое понятие риманова многообразия. Однако в условиях квантовогравитационной космологии гравитационное поле и вместе с ним пространство-время должны приобрести квантовые свойства, и, следовательно, обычное описание структуры пространства-времени становится непригодным. При этом говорят о флуктуациях метрики и топологии, об изменении самого характера пространственно-временных отношений. В связи с этим анализ размерности как одного из наиболее общих, но в то же время количественно выражаемого свойства пространства-времени может стать той нитью, потянув за которую удастся хотя бы отчасти распутать клубок трудных космологических проблем.

Подобную попытку предпринял английский астрофизик В. Сасло, предложивший необычное решение известной проблемы горизонта, связанной с интерпретацией наблюдаемой крупномасштабной однородности Вселенной. Эта попытка по меньшей мере наглядно иллюстрирует важность вопроса о размерности пространства для космологии ранней Вселенной, поэтому рассмотрим ее подробнее.

Сначала о самой проблеме, которая возникает, когда пытаются согласовать два важнейших наблюдательных факта космологии: однородность Вселенной и конечность времени ее расширения.

Однородность Вселенной понимается как одинаковость ее свойств в разных местах пространства. Ясно, что речь может идти только о крупномасштабной однородности, т. е. нужно сравнивать области Вселенной, размеры которых много больше среднего расстояния между галактиками. До открытия реликтового электромагнитного излучения об однородности могли свидетельствовать только подсчеты числа галактик на различных участках небосвода; это был трудоемкий и неточный метод. Открытие реликтового излучения в 1965 г. принципиально расширило наблюдательные возможности космологии. Само

название «реликтовое» говорит о том, что составляющие это излучение фотоны сохранились в первозданном виде с очень давнего времени — с так называемого момента отрыва излучения от вещества $t_{отр}$. Согласно современной космологии достаточное удаление в прошлое нашей Вселенной должно приводить не только к увеличению средней плотности вещества (о чем говорит факт расширения Вселенной), но и к повышению температуры. Когда-то вся Вселенная была заполнена горячей плазмой — смесью активно взаимодействующих элементарных частиц: протонов, электронов, фотонов и т. п. По мере расширения Вселенной ее температура падала, пока, наконец, средняя энергия фотонов не стала меньше типичной энергии возбуждения атомов водорода, которые к тому времени уже могли устойчиво существовать. Этот момент и называется моментом отрыва излучения от вещества, поскольку с тех пор фотоны космологического происхождения практически перестали взаимодействовать с веществом. По современным данным, отрыв излучения произошел всего спустя примерно десять тысяч лет после начала расширения и за много миллиардов лет «до нашей эры». Таким образом, реликтовые фотоны, которые регистрируются приборами сейчас, прошли путь в миллиарды световых лет и хранят память о состоянии, в котором была Вселенная миллиарды лет назад.

И вот, что самое удивительное, фотоны, приходящие с противоположных концов наблюдаемой Вселенной, свидетельствуют об одинаковости свойств областей Вселенной, разделенных миллиардами световых лет. Но; может быть, в такой высокой однородности нет ничего удивительного? Не вызывает же удивления высокая однородность вкуса чая всего через несколько минут после того, как кипящая вода покроет сухие чайники; а у Вселенной в запасе были, как уже говорилось, десятки тысячелетий. Однако то время, которое можно считать бесконечно большим для чаепития, оказывается слишком малым для Вселенной. Даже не рассматривая те процессы перемешивания, которые могли происходить в ранней Вселенной, можно утверждать, что теория относительности допускает установление однородности в областях, размеры которых не больше нескольких десятков тысяч световых лет.

Действительно, теория относительности исходит из того, что скорость света — максимальная скорость пере-

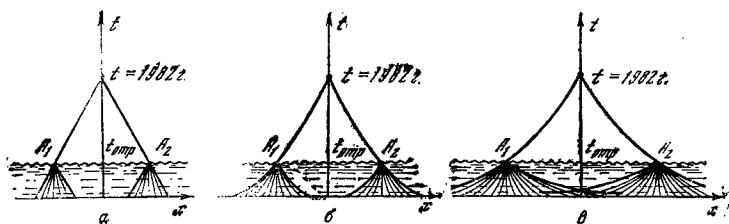


Рис. 6. Проблема горизонта

а — при игнорировании расширения Вселенной точки A_1 и A_2 не имеют общего прошлого; *б* — учет расширения в обычных космологических моделях ($a \sim t^\Gamma$, $\Gamma < 1$) несколько меняет картину, но проблема горизонта остается; *в* — проблема горизонта не возникает только при достаточно быстром начальном расширении Вселенной ($a \sim t^\Gamma$, $\Gamma \geq 1$), которое было бы неизбежным, если размерность пространства в ранней Вселенной была меньше трех, точки A_1 и A_2 имеют общее прошлое

дачи взаимодействия. Это ограничивает область взаимодействий (независимо от их природы) расстоянием, на которое успевает распространиться свет (эта граница и называется горизонтом). Поскольку до момента отрыва прошло всего несколько десятков тысяч лет, то и однородность к тому моменту могла установиться в областях, размеры которых не больше, чем несколько десятков тысяч световых лет. А судя по наблюдениям реликтового излучения, однородность в то время была уже на расстояниях миллиардов световых лет (рис. 6, *а*). В этом и состоит так называемая проблема горизонта.

Предыдущие рассуждения и иллюстрирующий их рис. 6, *а* содержат существенную неточность — они вовсе не учитывают факта расширения Вселенной. Это расширение описывается так называемым масштабным фактором $a(t)$, зависящим от времени и показывающим, как меняются со временем расстояния между галактиками. Масштабный фактор входит в метрику, описывающую космологическую модель,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) [(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2]$$

и определяется уравнениями Эйнштейна, которые связывают геометрические свойства пространства-времени со свойствами вещества.

При построении космологических моделей используют несколько типов предположений о веществе Вселенной. В простейшем случае каждое такое предположение ха-

рактизуется всего одним числом γ — коэффициентом, связывающим плотность энергии ϵ с давлением p в так называемом уравнении состояния вещества $p = \gamma \epsilon$.

Особое значение в космологии имеют два уравнения состояния. Первое применимо в нашу эпоху, когда отдельные галактики находятся на больших расстояниях друг от друга и практически не взаимодействуют, как отдельные пылинки; соответствующее уравнение состояния так и называется уравнением состояния пыли, оно сводится к равенству нулю давления, т. е. $\gamma = 0$.

Второе, так называемое ультрарелятивистское, уравнение состояния применимо к той эпохе, когда (если смотреть космологический фильм в обратную сторону) галактики настолько сблизилась, что все их вещество смешалось и нагрелось настолько, что превратилось в очень горячую плазму — смесь всевозможных частиц, движущихся с околосветовыми скоростями. В этом уравнении состояния $\gamma = 1/3$, или $p = \epsilon/3$. Коэффициент $1/3$ в этом уравнении прямо связан с трехмерностью пространства, т. е. $\gamma = 1/n$, где n — размерность пространства. Происхождение этого коэффициента нетрудно понять из следующих соображений. Для частицы, движущейся со скоростью, близкой к скорости света, импульс P и энергия E связаны соотношением $E = Pc$. Давление — это, как известно, импульс, передаваемый стенке сосуда в единицу времени, т. е. поток импульса (импульс, умноженный на скорость частицы). Но поскольку частицы движутся по n (в n -мерном пространстве) независимым направлениям, то и возникает коэффициент $1/n$, $p = \epsilon/n$.

Зависимость масштабного фактора от времени $a(t)$ определяется уравнением состояния; в нашем случае — всего одним числом γ : $a = t^\Gamma$, где $\Gamma = 2/3 (1 + \gamma)$. Учет этой зависимости приводит к некоторому изменению картины (рис. 6, б), но, поскольку во всех обычных космологических моделях показатель $\Gamma < 1$, проблема горизонта все равно остается.

Эта проблема так и не поддалась различным попыткам ее решения. Поэтому казалось неизбежным считать однородность Вселенной не результатом каких-либо физических процессов, а начальным условием, причину которого невозможно обсуждать в рамках современной физической космологии [28].

Однако английский астрофизик Сасло [29] подошел к проблеме горизонта совсем иначе. Он обратил внима-

ние на то, что если бы Вселенная в начальную стадию расширения была $2+1$ -мерной (пространство было не 3-, а 2-мерно) и вещество подчинялось уравнению состояния пыли ($\gamma=0$), то зависимость масштабного фактора от времени была бы $a \sim t$. Такой закон для $a(t)$, следующий из уравнений Эйнштейна в $2+1$ -мерном пространстве-времени, означает, что сама проблема горизонта исчезает (рис. 6, в).

Идея Сасло не помещается в рамки современной теоретической физики. Нет ответа на главный возникающий в связи с ней вопрос: каким образом можно было бы понимать и описывать переход от 2-мерного к 3-мерному пространству в процессе эволюции Вселенной? Результат Сасло о двумерности ранней Вселенной опирается на уязвимое предположение о пылеобразности вещества в ранней Вселенной. Действительно, это предположение кажется несовместимым с моделью горячей Вселенной. Более естественным является ультрарелятивистское уравнение состояния (в $n+1$ -мерном случае $p=\epsilon/n$), которое, однако, в 2-мерном пространстве уже не дает достаточно быстрого начального расширения. Уравнения Эйнштейна для $n+1$ -мерного пространства-времени приводят к зависимости

$$a(t) \sim t^{2/n(1+\gamma)}.$$

Ультрарелятивистскому уравнению состояния соответствует, как мы видели, $\gamma=1/n$. В этом случае достаточно быстрый темп расширения ($a \sim t$) осуществляется только в $1+1$ -мерном (струноподобном) случае.

Нетривиальное поведение размерности пространства-времени в ходе космологической эволюции имело бы, разумеется, отношение и к другим космологическим проблемам, в частности к проблеме начальных возмущений, ведущих к наблюдаемой крупномасштабной структуре Вселенной.

Конечно, приведенные соображения являются не более чем иллюстрацией, указывающей на важность понятия размерности для космологии, и находятся пока за рамками физики. Но раз уж мы вышли за рамки современной физики, можно попытаться сделать еще несколько научно-фантастических шагов.

В космологической задаче прежде всего следовало бы выяснить, каким образом меняющуюся размерность можно было бы согласовать с уравнениями Эйнштейна —

основой релятивистской космологии. При этом следует учитывать принципиальное отличие уравнений Эйнштейна от уравнений поля в пространстве Минковского (например, уравнений Максвелла), в пространстве-времени с фиксированной (плоской) геометрией. В уравнениях Максвелла, например, решение задачи с плоской (двумерной) симметрией в точности эквивалентно решению двумерных уравнений Максвелла. Для уравнений Эйнштейна, определяющих саму геометрию, это не так, и поведение масштабного фактора в анизотропной (в одном направлении) трехмерной космологии вовсе не такое, как в двумерной изотропной космологии. Поэтому, чтобы написанные выше формулы имели смысл, необходимо, чтобы масштабный фактор подчинялся именно n -мерным уравнениям Эйнштейна, а не $3+1$ -мерным уравнениям Эйнштейна с какой-то симметрией.

В уравнениях же Эйнштейна размерность пространства-времени учитывается просто числом координат. Поэтому следует присмотреться к понятию координат в ОТО еще раз. Лежащая в основе ОТО геометрическая модель произвольно искривленного пространства-времени органически включает в себя предположение о допустимости произвольных систем координат. Однако для физики недостаточно сказать, что допустимы произвольные системы координат; нужно еще объяснить, что же именно может быть произвольным в различных системах координат. Например, в классической механике перейти из данной инерциальной системы координат в произвольную другую инерциальную систему — это значит выбрать точку — центр новой системы координат, вектор скорости новой системы относительно исходной и три угла, определяющие ориентацию осей координат новой системы относительно исходной. В ОТО такое понимание слова *произвольная* невозможно, и с этим связано несколько сложных проблем ОТО, в частности описание системы отсчета, законы сохранения.

Роль в физике законов сохранения энергии и импульса, а также самих понятий энергии и импульса хорошо известна. Есть еще законы сохранения момента импульса и скорости центра масс. Все эти законы сохранения, как оказывается, тесно связаны со свойствами пространства-времени. Таких законов имеется всего десять (энергия и по три компонента импульса, момента импульса и скорости центра масс). Число 10 очень просто

связано со значением размерности пространства-времени: в n -мерном пространстве-времени можно построить $s = n(n+1)/2$ законов сохранения. При $n=4$ количество пространственно-временных законов сохранения равно $s=10$. Такая связь особенно ясный смысл имеет в СТО, где с десятью законами сохранения можно сопоставить десять симметрий пространства-времени — его однородность и изотропность. В общей теории относительности пространство-время может быть искривлено произвольным образом, так что в общем случае нет ни однородности, ни изотропности пространства-времени. Однако наблюдатель, т. е. надлежащим образом определенная система отсчета координат, может перемещаться в пространстве-времени по-прежнему «во все стороны». Если при этом использовать не «произвольные» координаты, а системы отсчета координат, построенные с помощью интервала $I(P, P')$, т. е. имеющие метрический смысл (см. с. 61, 62), то связь $s = n(n+1)/2$ остается в силе [34].

Нефизический характер «произвольности координат» не вполне удовлетворял самого Эйнштейна. Пытаясь свести пространственную структуру физической реальности к свойствам физического поля, он, в частности, говорил о четырехмерности физического поля [30]. А что, если сами физические поля использовать для различения точек пространства-времени (по величине полей)? Подобную мысль высказал Е. Вигнер [31]. Итак, роль координат поручается тем самым полям, которые входят в правую часть уравнений Эйнштейна (уравнение 7 гл. 2) и определяют геометрию пространства-времени.

Теперь настало время вспомнить самое, пожалуй, замечательное нововведение в современной квантовой теории поля, с которым в большой степени связан успех калибровочных теорий поля. Речь идет о явлениях, которые еще совсем недавно считались относящимися только к макроскопической физике, — о спонтанном нарушении симметрии и о фазовых переходах в теории поля [32]. Эти явления в современных единых теориях ответственны за то, что частицы, безмассовые по своей сути, при достаточно низкой температуре могут приобрести массу и стать похожими на реально наблюдаемые. Такое приобретение массы происходит за счет того, что поле, «исполняющее обязанности» массы, при достаточно низкой температуре может «замерзнуть» и стать классическим полем. Фазовые превращения такого рода уже нашли свое место и в

космологии ранней Вселенной, которая, как не раз говорилось, должна строиться при учете теории элементарных частиц (см. [33], где, в частности, объяснено понятие спонтанного нарушения симметрии).

Но какое отношение могут иметь подобные фазовые превращения к нашим полям-координатам? Поскольку масштабный фактор $a(t)$ — макроскопический (точнее, даже мегаскопический) параметр и сами уравнения Эйнштейна, приводящие к уравнениям для $a(t)$, имеют классический, макроскопический характер, то и пространственно-временные координаты, участвующие в этих уравнениях, должны быть классическими величинами. Такими координатами должны быть уже не сами (квантовые) поля $\hat{\varphi}_i$, а их средние значения $x_i = \langle \hat{\varphi}_i \rangle$. Теперь предположим, что правая часть уравнений Эйнштейна (или структура взаимодействия полей) устроена так, что при достаточно низкой температуре в результате спонтанного нарушения симметрии некоторые из полей-координат становятся совпадающими по величине: $\langle \hat{\varphi}_1 \rangle = \langle \hat{\varphi}_2 \rangle$. Такой фазовый переход означал бы уменьшение числа классических (макроскопических) степеней свободы или уменьшение размерности. Переход от трехмерности к двумерности, например, можно было бы понимать так, что одно измерение уже не может описываться классически, макроскопически, т. е. с помощью обычных уравнений Эйнштейна, и «выключается». Подобный переход выглядел бы как фазовый переход в структуре пространства.

Простейшая модель такого перехода — механическая колебательная система с двумя степенями свободы — с двумя пружинками, характеризуемыми двумя коэффициентами, один из которых обращается в бесконечность при понижении температуры до некоторой критической величины (одна пружинка «замерзает»).

Может показаться, что бессмысленно говорить о низких температурах по отношению к ранней (и очень горячей, как сейчас известно) Вселенной. Однако следует учитывать, что критическая температура, отделяющая достаточно низкие температуры от достаточно высоких, зависит от плотности вещества и других факторов. Поэтому ранняя Вселенная могла бы «замерзнуть» и при очень высоких (с земной точки зрения) температурах.

Можно по-разному относиться к возможности изменения размерности пространства в экстремальных физических ситуациях. Однако в любом случае для обоснован-

ного суждения необходимо сравнить следующие из этого предположения следствия с наблюдаемыми фактами. А для этого нужно прежде всего такие следствия извлечь. Подобные исследования могут, конечно, привести к расширению диапазона явлений, в котором трехмерность пространства будет обоснована, и это будет неплохая замена бездумной экстраполяции (макроскопически несомненной) 3-мерности сразу на все явления. Могут также обнаружиться убедительные основания для предположения об изменяемости размерности пространства. Тогда построение соответствующей теории стало бы ответом на вопрос, подобный вопросу Эйнштейна: «Каким образом можно сохранить существенные черты 3+1-мерности, если отказаться от обычных представлений о размерности?»

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Понятие числа измерений, или размерности пространства, относится к наиболее фундаментальным понятиям математики и физики — так называемых точных наук. Однако это понятие имеет не единственную, раз и навсегда вошедшую в арсенал науки форму выражения. Точное определение, формальное описание понятия размерности, необходимое при математическом рассмотрении, позволяет, с одной стороны, конструктивно использовать это понятие в точных науках, но, с другой стороны, выделяет лишь какой-то аспект общего представления о числе измерений.

Пространственно-временное описание реальности — это фундаментальнейший элемент научной картины мира, а размерность — наиболее общее количественно выражаемое свойство этого описания. Действительно, взглянем на последовательность исторически сменявших друг друга в физике пространственно-временных описаний: сферически-симметричное пространство и время с естественными положениями и движениями в физике Аристотеля, ньютоновские абсолютные пространство и время, плоское пространство-время специальной теории относительности, искривленное пространство-время общей теории относительности. Сюда можно добавить и гипотетические модели кваптованного пространства. Во всех этих кардинальных изменениях физической модели пространства-времени «уцелело», сохранилось только свойство $3+1$ -мерности.

Именно поэтому история развития и современное состояние понятия размерности и проблемы размерности пространства-времени заслуживают особого внимания.

А как же быть с вопросом: «Почему пространство трехмерно?» Окончательного ответа на этот вопрос физика пока не имеет. Впрочем, история науки свидетельствует о том, что окончательное решение какого-либо вопроса — вещь довольно сомнительная. Возьмем, например, вопрос о природе света. В XVIII в. было «окончательно» решено, что свет — это движение частиц. В XIX в.

было еще более «окончательно» решено, что свет — это волновое движение. А XX век сумел объединить оба эти кажущиеся взаимоисключающими решения в «окончательном» квантовом решении.

Вопрос о трехмерности пространства не имеет пока по существу ни одного «окончательного» решения. Нет пока физической теории, в которой факт $3+1$ -мерности объяснялся бы какими-то более глубокими фактами. Вместе с тем эта книга, как надеется ее автор, дает представление о той грандиозной роли, которую играет понятие размерности в физической картине мира. Именно из-за этой роли вопрос, вынесенный в заголовок этой книги и все еще ждущий ответа, так важен и так загадочен.

ОСНОВНЫЕ СПОСОБЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ПОНЯТИЯ РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА *

1. Линейное пространство $L = \{x, y, \dots\}$ над полем чисел $F = \{a, b, \dots\}$ — это множество, для элементов (точек, векторов) которого определены операции сложения и умножения на число, причем эти операции должны удовлетворять обычным правилам. Например, если x, y — элементы L и a, b — числа из F , то $x+y = y+x$, $(a+b)x = ax+bx$, $a(x+y) = ax+ay$ и т. д.

Простейшие примеры линейных пространств — множества всех векторов на прямой, плоскости или в пространстве с обычным сложением векторов и умножением их на действительное число.

То множество (поле) чисел, которое фигурирует в определении линейного пространства, может быть выбрано не единственным образом. По существу требуется только, чтобы для этих чисел выполнялись обычные арифметические правила $a+b = b+a$, $ab = ba$ и т. д. Поэтому в качестве множества чисел F можно взять не только множество всех действительных чисел, но и, например, множество всех рациональных чисел. Не обязательно даже, чтобы поле F содержало бесконечное число элементов, существуют и конечные поля. Например, поле может состоять всего из двух элементов; если эти элементы обозначить символами 0 и 1, то операции сложения

* Здесь очень кратко и схематично описаны математические понятия, упоминающиеся в книге. Строгое и полное описание этих понятий можно найти, например, в книгах: Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. М., 1976; Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М., 1977; Хокинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства-времени. М., 1977.

ния и умножения задаются следующим образом: $0+0=0$, $0+1=1$, $1+1=0$; $0\cdot 0=0$, $0\cdot 1=0$, $1\cdot 1=1$.

2. Размерность линейного пространства L — это минимальное число n , такое, что существует набор элементов из L $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, порождающий все пространство L , т. е. для любого элемента x из L существуют такие коэффициенты из F (a_1, a_2, \dots, a_n) , что $x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$. Каждое линейное пространство размерности n над полем F можно представить как совокупность всех наборов вида (a_1, a_2, \dots, a_n) , где a_k — элементы F , при этом операции сложения и умножения на число имеют вид $(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$ и $c(a_1, \dots, a_n) = (ca_1, \dots, ca_n)$. Таким образом, множество всех обычных трехмерных векторов можно представить как множество всевозможных троек действительных чисел (a_1, a_2, a_3) . Важно, однако, отметить, что n -мерное линейное пространство может состоять и из конечного числа точек; например, n -мерное линейное пространство над полем, состоящим из двух элементов, содержит всего 2^n точек. Это делает, в частности, наглядной независимость понятия размерности линейного пространства от понятий топологической размерности, хотя n -мерное линейное пространство над полем действительных чисел можно естественным образом превратить в n -мерное топологическое пространство.

3. Метрическое пространство — это множество, для любой пары элементов (точек) x, y которого определено неотрицательное число — расстояние — $\rho(x, y)$, обладающее следующими свойствами: $\rho(x, y) = 0$ только в том случае, когда $x = y$; $\rho(x, y) = \rho(y, x)$; для любых трех точек x, y, z выполняется неравенство (*неравенство треугольника*) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$.

Важный пример метрического пространства можно получить, если в n -мерном линейном пространстве над полем действительных чисел расстояние между двумя точками $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$ определить так: $\rho(x, y) = [(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2]^{1/2}$. Это — евклидово пространство E^n . Так как любое множество точек в метрическом пространстве само является метрическим пространством, то E^n порождает сразу много примеров метрических пространств.

В метрическом пространстве для любого числа $\varepsilon > 0$ можно определить понятие ε -окрестности некоторой точки x как множества всех точек пространства, удаленных от точки x на расстояние, не большее ε . Множество M

в метрическом пространстве называется *открытым*, если для любой точки этого множества найдется некоторая ε -окрестность, которая целиком содержится в M . Некоторая точка принадлежит *замыканию* множества M (обозначается \bar{M}), если любая ε -окрестность этой точки содержит точки из M . Множество M называется *замкнутым*, если оно совпадает со своим замыканием $M = \bar{M}$.

Однако понятия открытых и замкнутых множеств могут быть введены и не с помощью метрики, а аксиоматически. Это приводит к понятию топологического пространства.

4. Топологическое пространство — это множество, в котором задана совокупность подмножеств (называемых открытыми), такая, что объединение любого числа и пересечение конечного числа этих множеств также принадлежит совокупности. Нетрудно проверить, что открытые множества в метрическом пространстве обладают этим свойством, т. е. метрическая структура определяет (индуцирует) некоторую топологическую структуру; но в то же время не любая топологическая структура может быть индуцирована какой-то метрической структурой.

Некоторая точка принадлежит замыканию множества M , если любое открытое множество, содержащее эту точку, т. е. любая окрестность, содержит также и точки M . Множество M называется замкнутым, если оно совпадает со своим замыканием.

Топологическая структура позволяет ввести понятие *непрерывного* отображения одного топологического пространства на другое: если непрерывное отображение f переводит точку x пространства X в точку $y = f(x)$ пространства Y , то для любой окрестности точки $y = Oy$ найдется окрестность точки x , которая при отображении f целиком содержится в Oy . Отображение называется *топологическим*, или *гомеоморфным*, если оно взаимно однозначно и взаимно непрерывно (непрерывно в обе стороны). *Топологическими* называются свойства, не меняющиеся при гомеоморфных отображениях.

5. Размерность топологического пространства может быть определена несколькими, вообще говоря, неэквивалентными способами. Основных размерностных инвариантов три: Ind , ind и dim .

Большая и малая индуктивные размерности Ind и ind определяются сходным образом по индукции. Для пустого

множества Λ в качестве начального пункта индукции полагают $\text{Ind}\Lambda = \text{ind}\Lambda = -1$. Предполагая, что уже определены пространства X , для которых $\text{Ind}X \leq n-1$ и $\text{ind}\Lambda \leq n-1$, определяют n -мерные пространства: $\text{ind}X \leq n$, если для любой точки x пространства X и любой ее окрестности Ox найдется такая окрестность O_1x , замыкание которой содержится в Ox , что ее граница (множество точек, принадлежащих замыканию \bar{O}_1x , но не принадлежащих O_1x) имеет размерность, не большую, чем $n-1$. Если $\text{ind}X \leq n$, но неверно, что $\text{ind}X \leq n-1$, то по определению $\text{ind}X = n$. (Размерность Ind определяется аналогично с заменой точки x на замкнутое множество.)

Размерность $\dim X$ определяется с помощью понятия *покрытия* — конечной совокупности открытых множеств, объединение которых дает все X . Покрытие ω' вписано в покрытие ω , если любое множество из ω' содержится целиком в некотором множестве из ω . *Кратностью покрытия* называется максимальное число множеств покрытия, имеющих общую точку. Размерность $\dim X$ определяется как наименьшее число n , такое, что во всякое покрытие пространства X можно вписать покрытие кратности $n+1$.

Размерности ind , Ind и \dim совпадают в широком классе топологических пространств, и, в частности, для евклидова пространства $\text{ind}E^n = \text{Ind}E^n = \dim E^n = n$.

6. Многообразие, являющееся важнейшим понятием для пространственно-временного описания в современной физике, определяется как топологическое пространство, каждая точка которого обладает окрестностью, гомеоморфной (топологически эквивалентной) евклидову пространству E^n ; конечный или счетный набор таких окрестностей должен образовать покрытие всего пространства. Отображение, устанавливающее топологическую эквивалентность каждой окрестности из этого покрытия пространству E^n , одновременно ставит каждой точке из этой окрестности в соответствие набор n чисел — координат соответствующей точки в E^n . Этот набор n чисел является *координатами* точки многообразия. Введение координат в многообразие — существенно не однозначная операция. Покрытие многообразия вместе с отображением элементов этого покрытия на E^n называется *атласом многообразия*, а отображение отдельного элемента покрытия на E^n называется *картой*. Чтобы можно было рассматривать дифференциальные уравнения на многообразии, от атласа тре-

буется определенная согласованность составляющих его карт.

Риманово многообразие (математическая модель пространства-времени в ОТО) — это многообразие, в котором задана метрика, т. е. каждым двум точкам с бесконечно близкими значениями координат $x^{i'} - x^i = dx^i$ ставится в соответствие некоторое число

$$ds^2 = \sum_{i, k=1}^n g_{ik} dx^i dx^k.$$

К предисловию и ввoднoй главе

1. *Poincaré H.* Pourquoi l'espace a trois dimensions? — *Rev. metaphys. et morale*, 1912, vol. 20, p. 483 (рус. пер. в кн.: *Пуанкаре А.* Последние мысли. Пг., 1923).
2. *Ehrenfest P.* In what way does it become manifest in the fundamental laws of physics that space has three dimensions? — *Proc. Amsterdam acad.*, 1917, vol. 20, p. 200; *Welche Rolle spielt die Dreidimensionalität des Raumes in den Grundgesetzen der Physik?* — *Ann. Phys.*, 1920, Bd. 61, S. 440.
3. *Кузнецов Б. Г.* История философии для физиков и математиков. М.: Наука, 1974. Гл. V; *Рожанский И. Д.* Античная наука. М.: Наука, 1980; *Гайденко П. П.* Обоснование научного знания в философии Платона. — В кн.: Платон и его эпоха. М.: Наука, 1979.
4. *Аристотель.* О небе, 268 а, в. — *Сочинения.* М.: Мысль, 1981. Т. 3.
5. *Кант И.* Сочинения. М.: Мысль 1963, т. 1, с. 71; *Идлис Г. М.* Кант и современные представления о Вселенной. — *Природа*, № 6, 1974.

К главе 1

1. *Пуанкаре А.* Избр. тр. М.: Наука, 1974, т. 3, с. 656.
2. *Рид К.* Гильберт. М.: Наука, 1977, с. 58.
3. *Александров П. С.* Пуанкаре и топология. — В кн.: *Пуанкаре А.* Избр. тр., т. 2, с. 809.
4. *Пуанкаре А.* Последние мысли. Пг., 1923, с. 31.
5. Там же, с. 35.
6. *Риман Б.* О гипотезах, лежащих в основании геометрии. — В кн.: *Об основаниях геометрии.* М.: Гостехиздат, 1956, с. 309.
7. *Пуанкаре А.* Последние мысли, с. 75.
8. *Скороходова О. И.* Как я воспринимаю, представляю и познаю окружающий мир. М.: Педагогика, 1972.
9. *Пуанкаре А.* Наука и гипотеза. М., 1904, с. 65.
10. *Пуанкаре А.* Последние мысли, с. 52.
11. *Пуанкаре А.* Наука и гипотеза, с. 43.
12. *Пуанкаре А.* Последние мысли, с. 35.
13. *Пуанкаре А.* Наука и гипотеза, с. 31.
14. Там же, с. 100.
15. *Пуанкаре А.* Последние мысли, с. 37.

16. Пуанкаре А. Избр. тр., т. 3, с. 579.
17. Poincaré H. On the foundations of geometry.— The Monist, 1898, vol. 9, p. 29.
18. Александров П. С., Пасынков В. А. Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973, с. 8.
19. Пуанкаре А. Последние мысли, с. 47.
20. Там же, с. 35.
21. Пуанкаре А. Избр. тр., т. 3, с. 555.
22. Гинзбург В. Л. О теории относительности. М.: Наука, 1979.
23. Пуанкаре А. Избр. тр., т. 3, с. 478.
24. Пуанкаре А. Последние мысли, с. 30.

К главе 2

1. Эйнштейн А. Собр. науч. тр. М.: Наука, 1965, т. 2, с. 753.
2. Франкфурт У. И. Специальная и общая теория относительности. М.: Наука, 1968; Визгин В. П. Релятивистская теория тяготения. М.: Наука, 1981.
3. Эйнштейн А. Собр. науч. тр., т. 1, с. 149.
4. Там же, с. 451.
5. Там же, т. 2, с. 125.
6. Там же, т. 1, с. 575.
7. Там же, т. 2, с. 755.
8. Там же, т. 1, с. 575.
9. Там же, с. 232—233.
10. Там же, т. 4, с. 312.
11. Там же, т. 2, с. 757.
12. Там же, т. 1, с. 571.
13. Там же, т. 4, с. 312.
14. Там же, т. 4, с. 347.
15. Бергман П. Г. Введение в теорию относительности. М.: Изд-во иностр. лит., 1947, с. 361.
16. Платон. Соч. М.: Мысль, 1971, т. 3, ч. 1, с. 285; Кузнецов В. Г. История философии для физиков и математиков. М.: Наука, 1974, с. 111.
17. Салам А. Калибровочное объединение фундаментальных сил.— В кн.: На пути к единой теории поля. М.: Знание, 1980; Природа, № 1, 1981, с. 54.
18. Эйнштейн А. Собр. науч. тр., т. 2, с. 872.
19. Там же, с. 238.
20. Там же, с. 88.
21. Там же, т. 4, с. 223.
22. Там же, т. 2, с. 873.
23. Там же, т. 4, с. 312.

К главе 3

1. Ehrenfest P. Proc. Amsterdam acad., 1917, vol. 20, p. 200.
2. Куржниц Д. А. Сверхпроводимость и элементарные частицы.— УФН, 1978, т. 125, с. 169.

8. *Tangherlini F. R.*— Nuovo cim., 1963, vol. 27, p. 636; *Gurevich L., Mostepanenko V.*— Phys. Lett., 1971, vol. 35A, p. 201.
4. *Мостепаненко А. М., Мостепаненко М. В.* Четырехмерность пространства и времени. М.; Л.: Наука, 1966.
5. *Ehrenfest P.*— Ann. Phys., 1920, Bd. 61, S. 440.
6. *Урысон П. С.*— Журн. Рус. физ.-хим. о-ва, 1915, т. 47, № 10Б, штейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979, с. 522.
7. *Tangherlini F.* Op. cit.
8. Эрэнфест — Иоффе: Научная переписка. Л.: Наука, 1973, с. 115, 120.
9. *Френкель В. Я.* Пауль Эрэнфест. М.: Атомиздат, 1977, с. 158.
10. *Розенфельд Б. А.* История неевклидовой геометрии. М.: Наука, 1976. Гл. 11.
11. Нейтрон. М.: Наука, 1975, с. 11.
12. *Паули В.* Труды по квантовой теории. М.: Наука, 1977, с. 193.
13. *Планк М.* Избр. тр. М.: Наука, 1975, с. 668.
14. *Эрэнфест П.* Относительность. Кванты. Статистика. М.: Наука, 1972, с. 477.
15. Там же, с. 180.
16. Эрэнфест — Иоффе, с. 46.
17. *Розенфельд Б. А.* История неевклидовой геометрии, с. 361.
18. Эрэнфест — Иоффе, с. 87.
19. *Френкель В. Я.* Пауль Эрэнфест, с. 57—63.
20. Эрэнфест — Иоффе, с. 98.
21. *Френкель В. Я.* Пауль Эрэнфест, с. 44.
22. *Киржниц Д. А.* Проблема фундаментальной длины.— Природа, 1973, № 1, с. 40.

К главе 4

1. *Александров П. С.* Предисловие.— В кн.: Гуревич В., Волмен Г. Теория размерности М.: Изд-во иностр. лит., 1948, с. 5.
2. *Александров П. С.* Теория размерности и смежные вопросы. М.: Наука, 1978, с. 389.
3. *Гуревич В., Волмен Г.* Теория размерности, с. 22.
4. *Нейман Л. С.* Радость открытия (математик Павел Урысон). М., 1972.
5. *Александров П. С.* Вступительная статья и примечания.— В кн.: Урысон П. С. Труды по топологии и другим областям математики. М.; Л.: Гостехиздат, 1951.
6. *Урысон П. С.*— Журн. Рус. физ.-хим. о-ва, 1915, т. 47, № 10Б, с. 341.
7. *Нейман Л. С.* Указ. соч., с. 71.
8. См. 5, с. 22.
9. Архив МГУ, ф. 24, оп. 1, № 1, 3, 75, 81, 86, 107.
10. *Albert Einstein: philosopher — scientist.* N. Y., 1949, p. 459.
11. *Визгин В. П.* Эрлангенская программа и физика. М.: Наука, 1975, с. 34—37.

1. Эддингтон А. Пространство, время и тяготение. Одесса, 1923, с. 181.
2. Finkelstein D. Space-time code.— Phys. Rev., 1974, vol. 9D, p. 2219.
3. Идлис Г. М. Кант и современные представления о Вселенной.— Природа, 1974, № 6, с. 73.
4. Гуревич Л. Э. Об одной фундаментальной проблеме в космологии.— В кн.: Эвристическая роль математики в физике и космологии. Л.: Наука, 1975, с. 39; Розенталь И. Л. О существовании физических пространств с размерностью $N \neq 3+1$. ИКИ АН СССР, пр=400, 1978.
5. Hawking S. W. Breakdown of predictability in gravitational collapse.— Phys. Rev., 1976, vol. 14D, p. 2460.
6. Whitrow G. J. Why physical space has three dimensions? — Brit. J. Philos. Sci., 1955, vol. 6, N 21.
7. Идлис Г. М. Структурная бесконечность Вселенной и Метагалактика как типичная обитаемая космическая система.— В кн.: Тр. Шестого совещ. по вопр. космогонии. М., 1959, с. 270; Картер Б. Совпадение больших чисел и антропологический принцип.— В кн.: Космология. Теории и наблюдения. М.: Мир, 1978, с. 369.
8. Мостепаненко А. М. Проблема универсальности основных свойств пространства и времени. Л.: Наука, 1969, с. 108, 140.
9. Киржниц Д. А. Проблема фундаментальной длины.— Природа, 1973, № 1, с. 40.
10. Вьялцев А. Н. Дискретное пространство-время. М.: Наука, 1965.
11. Блохинцев Д. И. Пространство и время в микромире. М.: Наука, 1970.
12. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. М.: Мир, 1977, т. 1, с. 40.
13. Там же, с. 39.
14. Зельманов А. Л. Космология.— В кн.: Развитие астрономии в СССР. М.: Наука, 1967.
15. Эйнштейн А. Собр. науч. тр., т. 1, с. 522.
16. Салам А. Калибровочное объединение фундаментальных сил.— В кн.: На пути к единой теории поля. М.: Знание, 1980.
17. Броуштейн М. П. Квантование гравитационных волн.— В кн.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М., 1979, с. 433.
18. Горелик Г. Е. Первые шаги квантовой гравитации и планковские величины.— В кн.: Эйнштейновский сборник, 1978—1979. М.: Наука, 1982.
19. Озерной Л. М. Происхождение и жизнь галактик. М.: Знание, 1978.
20. Бигнер Е. Этюды о симметрии. М.: Мир, 1971.
21. Киржниц Д. А. Проблема фундаментальной длины.— Природа, 1973, № 1, с. 40.
22. Тамм И. Е. Собр. науч. тр. М.: Наука, 1975, т. 2, с. 218, 226, 461.

23. *Никитин Ю. П., Розенталь И. Л.* О физической геометрии микромира. ИКИ АН СССР, Пр-368, 1977.
24. *Салам А.* Указ. соч.
25. *Маринов М. С.* Релятивистские струны и дуальные модели.— УФН, 1977, т. 121, с. 377.
26. *Вильсон К., Когут Дж.* Реномализационная группа и ϵ -разложение. М.: Мир, 1975, с. 28.
27. *Киржниц Д. А.* Сверхпроводимость и элементарные частицы.— УФН, 1978, т. 125, с. 169.
28. *Чернин А. Д.* Реликтовое излучение, бесконечность и горизонт.— Природа, 1979, № 3.
29. *Saslaw W. C.* A relation between homogeneity of the Universe and dimensionality of space.— MNRAS, 1977, vol. 179, p. 659.
30. *Эйнштейн А.* Собр. науч. тр., т. 4, с. 348.
31. *Вигнер Е.* Этюды о симметрии. М.: Мир, 1971, с. 260.
32. *Киржниц Д. А.* Сверхпроводимость и элементарные частицы.— УФН, 1978, т. 125, с. 169.
33. *Кобзарев И. Ю.* Спонтанное нарушение симметрии и его космологические следствия.— Природа, 1975, № 11; *Киржниц Д. А., Линде А. Д.* Фазовые превращения в микромире и во Вселенной.— Природа, 1979, № 11.
34. *Горелик Г. Е.* Законы сохранения в ОТО, размерность пространства-времени и принцип соответствия.— В кн.: История и методология естественных наук, вып. 26. М.: Изд-во МГУ, 1981, с. 110.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА О ПОНЯТИИ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ И ЕГО СВОЙСТВАХ

- Бергман П.* Загадка гравитации. М.: Наука, 1969.
- Визгин В. П.* Эйнштейн и другие (к истории создания общей теории относительности).— Природа, 1979, № 3, с. 27.
- Виленькин Н. Я.* Рассказы о множествах. М.: Наука, 1965.
- Гинабург В. Л.* О теории относительности. М.: Наука, 1979.
- Гуревич Л. Э., Глинер Э. Б.* Пространство и время. М.: Знание, 1974.
- Киржниц Д. А.* Проблема фундаментальной длины.— Природа, 1973, № 1, с. 40.
- Марков М. А.* О природе материи. М.: Наука, 1976.
- Мостепаненко А. М., Мостепаненко М. В.* Четырехмерность пространства и времени. М.; Л.: Наука, 1966.
- Мостепаненко А. М.* Пространство и время в макро-, мега- и микромире. М.: Политиздат, 1974.
- Пространство, время, движение.* М.: Наука, 1971.
- Салам А.* Последний замысел Эйнштейна: объединение фундаментальных взаимодействий и свойств пространства-времени.— Природа, 1981, № 1, с. 54.
- Синг Дж.* Беседы о теории относительности. М.: Мир, 1973.
- Фридман А. А.* Мир как пространство и время. М.: Наука, 1965.
- Хан Г.* Кризис интуиции.— В кн.: Математики и математика. М.: Знание, 1972.
- Хокинг С.* Виден ли конец теоретической физике? — Природа, 1982, № 5, с. 48.
- Эйнштейн А., Инфельд Л.* Эволюция физики. М.: Молодая гвардия, 1966.

	Предисловие	3
	Вводная глава	7
	Кратко о предыстории	7
	Вопросы «почему» в науке	14
	Классическая модель пространства	17
	Что такое топология?	20
Глава I.	Возникновение топологического понятия размерности	24
	Начало современной истории понятия размерности	24
	Психологизм Пуанкаре	28
	Размерность пространства и топология	31
	Размерность пространства и физика	39
	Дискретность в квантовой физике и понятие размерности пространства-времени	42
Глава II.	Теория относительности и 3+1-мерность пространства-времени	46
	Понятие размерности пространства и общая теория относительности	46
	Метрические и топологические свойства пространства-времени. Представления Эйнштейна о размерности пространства	56
	Пятимерные теории и 3+1-мерность физического пространства-времени	65
	Квантовая дискретность и четырехмерный пространственно-временной континуум	69
Глава III.	Размерность — физическое понятие, трехмерность — физический факт	73
	«Каким образом в фундаментальных законах физики проявляется то, что пространство имеет три измерения?»	73
	Что такое физика в n -мерном пространстве?	80
	Предпосылки работы Эренфеста	85
	Мера жесткости математической модели пространства-времени. Значение работ о физике размерности пространства	92

Глава IV.	Возникновение топологической теории размерности и физика	96
	Предыстория топологической теории размерности (Пуанкаре, Брауэр, Лебег)	96
	Урысон и Менгер — создатели топологической теории размерности	99
	Роль физики в математическом творчестве Урысона и Менгера	103
Глава V.	Размерность пространства-времени и современная физика	109
	В каком смысле выделено значение размерности пространства-времени, равное $3+1$?	109
	Физическое пространство-время и топология	114
	Физика и геометрия	120
	Что такое «планковские величины» и какое отношение они имеют к квантовой гравитации?	128
	Зачем нужна $cG\hbar$ - теория?	132
	Размерность пространства-времени и физика элементарных частиц	137
	Проблема размерности пространства и космология ранней Вселенной	143
	Закключение	153
	Дополнение. Основные способы математического описания понятия размерности пространства .	155
	Примечания	160
	Рекомендуемая литература о понятии пространства-времени и его свойствах	165

Геннадий Ефимович Горелик

**ПОЧЕМУ
ПРОСТРАНСТВО
ТРЕХМЕРНО?**

Утверждено к печати
Редколлегией
научно-популярной литературы
АН СССР

Редактор издательства **В. П. Лишевский**
Художник **В. В. Суриков**
Художественный редактор **Н. А. Фильчагина**
Технический редактор **Л. И. Куприянова**
Корректоры **Е. Н. Белоусова, Г. Н. Лац**

ИБ № 24555

Сдано в набор 07.06.82
Подписано к печати 10.10.82
Т-12596. Формат 84×108¹/₃₂

Бумага типографская № 2
Гарнитура обыкновенная
Печать высокая

Усл. печ. л. 8,82. Уч.-изд. л. 9,2. Усл. кр-отт. 9
Тираж 70000 экз. Тип. зак. 1824
Цена 55 коп.

Издательство «Наука»
117864 ГСП-7, Москва, В-485, Профсоюзная ул., 90
2-я типография издательства «Наука»
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10



**ИЗДАТЕЛЬСТВО
«НАУКА»
ГОТОВИТСЯ
К ПЕЧАТИ
КНИГА:**

ВИЛЕНКИН Н. Я.
В поисках бесконечности.
10 л. 35 к.

В книге в популярной форме излагаются основные понятия и результаты теории множеств и, в частности, теории бесконечных множеств; созданной Г. Кантором в 70-х годах XIX в. Понятие теории множеств отражают наиболее общие свойства математических объектов.

Для читателей, интересующихся математикой, а также всем желающим узнать, что такое теория множеств.

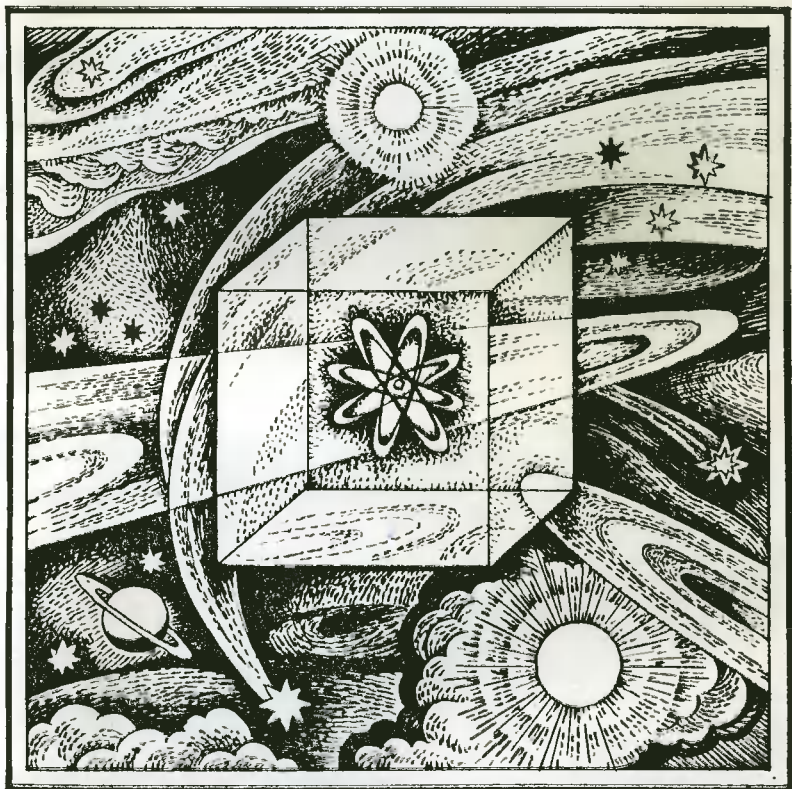
Предварительные заказы на книги можно оформить во всех магазинах «Академкнига», а также в местных магазинах книготоргов.

Для получения книг почтой заказы просим направлять по одному из перечисленных адресов магазинов «Книга-почтой» «Академкнига»:

480091 **Алма-Ата**, 91, ул. Фурманова, 91/97; 370005 **Баку**, 5, ул. Джапаридзе, 13; 320093 **Днепропетровск**, проспект Ю. Гагарина, 24; 734001 **Душанбе**, проспект Ленина, 95; 252030 **Киев**, ул. Пирогова, 4; 277012 **Кишинев**, проспект Ленина, 148; 443002 **Куйбышев**, проспект Ленина, 2; 197345 **Ленинград**, Петрозаводская ул., 7; 220012 **Минск**, Ленинский проспект, 72; 117192 **Москва**, В-192, Мичуринский проспект, 12; 630090 **Новосибирск**, Академгородок, Морской проспект, 22; 620151 **Свердловск**, ул. Маминна-Сибиряка, 137; 700187 **Ташкент**, ул. Дружбы народов, 6; 450059 **Уфа**, 59, ул. Р. Зорге, 10; 720001 **Фрунзе**, бульвар Дзержинского, 42; 310078 **Харьков**, ул. Чернышевского, 87.

Г.Е.ГОРЕЛИН

ПОЧЕМУ ПРОСТРАНСТВО ТРЕХМЕРНО?



ИЗДАТЕЛЬСТВО НАУКА